Matematika

Bevezető

Az égben Isten vezet egy Nagy Könyvet,
amelyben minden matematikai probléma elegáns megoldása megtalálható. (Erdős Pál)

Húsz éve tanítok matematikát, s minden évben vezettem egy vagy több tehetséggondozó szakkört. Ebbéli tapasztalataimon alapul ez a középiskolai matematikai tehetséggondozást segítő anyag. A tehetségnek sokféle definíciója van. Kiket tarthatunk tehetségesnek, mely diákokkal érdemes tehetséggondozás keretein belül foglalkozni? Többféle szempontot is megjelölnék. Tehetségesnek tartom azokat a diákokat, akiknek egy-egy csoportban kevesebb magyarázat is szükséges ahhoz, hogy eredményesek legyenek; tehetségesek azok, akik teljesen önálló tanulásra képesek matematikából, illetve azok, akik erős pozitív attitűdöt mutatatnak a matematika iránt (tananyagon túlmutatóan kérdeznek, anyagrészek kapcsolatait vagy használhatóságát firtatják). Nem mindig a legjobb teljesítményűekkel érdemes foglalkozni, sokkal inkább azokkal, akik szívesen foglalkoznak a tananyagon túli részekkel tanórán kívül, a szabadidejükben is. A matematikai tehetséggondozásban igen jól használható Pólya György problémamegoldásra vonatkozó elmélete. Ezt megfelelően leegyszerűsítve azt mondhatjuk, négy lépcső visz a matematikai problémák, feladatok teljes megoldása felé:

I. lépcső: a feladat pontos megértése, a feladatban szereplő fogalmak értelmezése.
II. lépcső: indító ötlet: speciális esetek vizsgálata, általánosítás, hasonló feladatok keresése.
III. lépcső: lényegi ötletek, a megoldás terve és megoldás.
IV. lépcső: a megoldás elemzése, a használt ötlet továbbvitelének lehetősége.

A második és harmadik lépcsőben szereplő lépések ismételgethetők, ha egy megoldási terv nem visz sikerre. Az anyagban szereplő „bemelegítő feladatok” megoldásait ilyen „négylépcsős” alakban közöltem, így a tanárok számára mintát adhat, hogyan célszerű más feladatok megoldásánál is ilyen tanári segítséget adni.

Napjainkban a matematika számos területen kapcsolódik az informatikához. Napjaink matematikai gondolkodása magába foglalja az informatikai eszközök ésszerű használatát. Nemcsak ezen eszközök használatát kell ismerni, hanem be kell tudni építeni a matematikai problémamegoldásba, mindemellett ésszerűen kell alkalmazni, a heurisztika segítőjeként. Erre több helyen is példát ad ez a tehetséggondozó anyag.

Kiket céloz meg ez a tananyag?

- Egyfelől a tehetséges diákoknak ad lehetőséget, hogy további ismereteket szerezzenek; sok új ötletet mutat be; ezzel együtt módszeres és irányított gyakorlást jelenthet a problémamegoldás terén. A kutatási feladatok is nekik szólnak.
- Másfelől olvasmányos és érdeklődést felkeltő munkalapjaival a matematika iránt érdeklődő diákokat célozza meg, akik feltehető, hogy egy témakör megismerése után akár egy-két hozzá kapcsolódó feladat megoldásához is kedvet kapnak.
- Harmadikként a tehetséggondozással foglalkozó középiskolai tanárok használhatják a munkalapokat, a kapcsolódó feladatokat és a kis kutatási feladatokat, mint szakköri segédanyagot. A munkalapok önmagukban kerek egészet adnak, de tetszés szerint bővíthetők, mindegyikük nagyjából másfél órás szakköri időre készült, oktatható (és oktatásban kipróbált) tananyag.

A matematika annyira komoly szakterület,
hogy egyetlen alkalmat sem szabad elmulasztanunk arra, hogy szórakoztatóbbá tegyük.
(Blaise Pascal)

„Bemelegítő” feladatok

1. Meg lehet-e adni hét olyan pozitív egész számot, hogy mindegyikük pontosan három másik számmal legyen páronként relatív prím?
2. a) Szerkessz hat pontot, hogy mindegyik pont épp 3 másiktól legyen 3 cm távolságra!
   b) Megoldható-e a feladat hét ponttal is?
3. Oldd meg az egyenletet a pozitív egész számok körében:

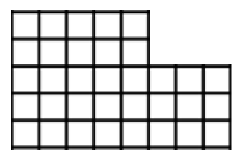
$x^4 = y^4 + 10736$

4. Igazold, hogy ha x, y és z valós számok közül pontosan egyik szám kisebb 1-nél, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$x + y + z + xyz \le 1 + xy + xz + yz$

5. Az ikozaéder olyan 20 lapú test, melynek minden lapja szabályos háromszög, s minden csúcsában öt szabályos háromszög találkozik.
   a) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk a test két csúcsát, mekkora az esélye, hogy az őket összekötő szakasz a test belsejében halad?
   b) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk a test két élét, mekkora az esélye, hogy közös valamelyik végpontjuk?
6. Melyik az a másodfokú függvény, melyre f(–3)= –17 , f(2)=22 és f(5)= –9 ?
7. Bontsuk a lehető legtöbb (legalább elsőfokú) polinom szorzatára:

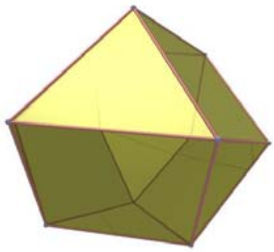
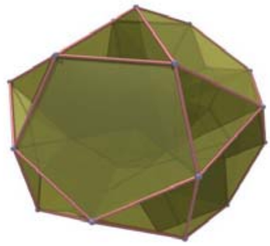
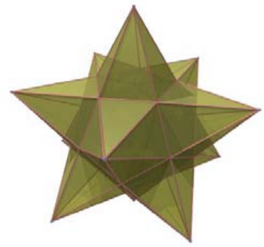
$x^{12} - 1 =$



8. A mellékelt ábrán látható, négyzetekből álló síkidomot vágjuk szét négy egyenes vágással úgy, hogy a keletkező részekből egyetlen négyzetet lehessen összeállítani!
9. Két kör középpontja az $O_1(3; 3)$ és az $O_2(–5; -1)$ pont. A körök metszéspontjainak egyike az x, a másik az y tengelyen van.
   a) Szerkesszük meg a koordináta-rendszert, a két pontot és a köröket!
   b) Írjuk fel a két kör egyenletét!
10. Egy 25 cm magasságú, szabályos négyoldalú gúla alakú edény teljesen zárt, benne folyadék van. Ha a talpára állítjuk, akkor x cm magasságban, ha a csúcsára állítjuk, akkor y cm magasságban áll benne a folyadék. Igazolja, hogy x és y számok közül legalább az egyik irracionális!
    - A megoldáshoz használható a Wiles-Fermat tétel: Ha $n \ge 3$ és *a, b, c, n* pozitív egészek, akkor soha nem teljesülhet az $a^n + b^n = c^n$ egyenlőség. (Pierre de Fermat-nak ezt a XVII. században megfogalmazott tételét 1993-ban igazolta Andrew Wiles.)

Poliéderek, szabályos és féligszabályos testek

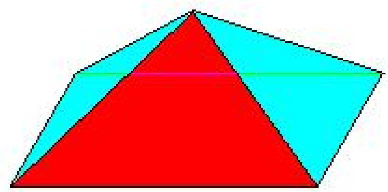
Ezen a munkalapon **poliéder**ekről lesz szó, azaz olyan testekről, amelyeket sokszöglapok határolnak. A sokszögeket a test lapjainak, csúcsaikat a test csúcsainak, oldalaikat pedig a test éleinek nevezzük.

Minden poliédercsúcsban legalább három sokszög csúcsa találkozik, s a poliéder minden éle két-két sokszög közös oldala.

M11. Létezhet-e olyan poliéder, amelyet tizenhét háromszöglap határol?

M12. Egy kisvállalkozó szabályos négyoldalú gúla alakú ajándéktárgyakat készít, s hat különböző színű festéket vesz, hogy a gúlákat befesse. Hány különböző színezésű gúlát készíthet, ha minden oldalt egyszínűre fest, és az élben szomszédos lapokat eltérő színűre festi? Két színezést azonosnak tekint, ha egyikből a másik megkapható elforgatás, mozgatás segítségével. (A szabályos négyoldalú gúla olyan poliéder, melynek egyik lapja négyzet, a többi négy éle pedig egyenlő.)



M13. Igazoljuk, hogy egy konvex poliédercsúcsnál találkozó szögek összege 360^o-nál kisebb!

A konvex poliéderekre igaz Euler tétele:

Lapok száma + Csúcsok száma = Élek száma + 2

Röviden: **L+C=É+2** . Ez például a kocka esetében a 6+8=12+2 igaz egyenlőséget adja.

Egy poliédert akkor nevezünk **szabályos test**nek, ha lapjai egybevágó szabályos sokszögek, s bármelyik két csúcsánál "ugyanolyan fajta" szögek keletkeznek (létezik bármelyik csúcsot a belőle induló félegyenesekkel együtt bármelyik másik csúcsba vivő térbeli egybevágóság). Vizsgáljuk meg, ezek milyen testek lehetnek! Legalább három szabályos sokszögnek kell találkoznia egy csúcsban, s az egy csúcsban találkozó szögek összegének az M13 kérdés alapján 360^o-nál kisebbnek kell lenni. Ezzel leszűkülnek a lehetőségek:

- A szabályos háromszög minden szöge 60^o, ezért ha egybevágó szabályos háromszögekből készítünk szabályos testet, a test egy csúcsában három, négy vagy öt lap találkozhat. (Hat darab már M13-nak ellentmond!)
- A négyzet minden szöge 90^o, ezért a test egy csúcsában csak három négyzet találkozhat. (Négy darab már M13-nak ellentmond!)

- A szabályos ötszög minden szöge 108°, ezért a test egy csúcsában csak három ilyen találkozhat. (Négy darab már M13-nak ellentmond!)
- Az ötnél több oldalú szabályos sokszög minden szöge legalább 120°, ezért a test egy csúcsában M13 miatt még három sem találkozhat, kettő esetén pedig nem poliédert kapunk.

A lehetséges esetek tehát:

Hány oldalú szabályos sokszög	Egy csúcsban hány sokszög találkozik
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

Nézzük az első esetet! Jelölje x a lapok számát! Ekkor az x darab háromszöglap csúcsainak száma $3x$, de egy csúcsban három lap találkozik, ezért ezt hárommal osztani kell, így kapjuk a poliéder csúcsai számát: x. Az x darab háromszöglapnak $3x$ darab oldala van, a poliéderben két-két háromszögoldal találkozik egy élben, így a poliéder éleinek száma $\frac{3x}{2}$.

Az Euler-tételbe a kapott képleteket beírva a következő egyenletet kapjuk: $x + x = \frac{3x}{2} + 2$

Ennek megoldása x=4. Tehát megkaptuk, hogy ha létezik a fenti táblázat első sorának megfelelő test, akkor annak négy lapja kell, hogy legyen. A fenti okoskodásból adódó képletek szerint a csúcsok száma is 4, az éleké pedig 6.
Ilyen test valóban létezik, a neve **szabályos tetraéder**.

M14: Számítsuk ki a fenti módon, hogy a táblázat többi sorában levő esetek hány lapú, hány élű és hány csúcsú testeket adnak!
Az alábbi eredmények jönnek ki, mindegyik kapott test létezik:

Hány oldalú szabályos sokszög	Egy csúcsban hány találkozik	Lapok száma	Csúcsok száma	Élek száma	Név
3	3	4	4	6	**szabályos tetraéder**
3	4	8	6	12	**oktaéder**
3	5	20	12	30	**ikozaéder**
4	3	6	8	12	**kocka (hexaéder)**
5	3	12	20	30	**dodekaéder**

E testeket **platoni testek**nek is szokták nevezni.

M15a gyűjtőmunka: Keresd meg az elnevezés eredetét, gyűjts történeti anyagot, mit jelképeztek régen e testek!
E testek sok érdekes tulajdonsággal rendelkeznek. Egyik ilyen tulajdonságuk a **dualitás**.

M15b gyűjtőmunka: Mit jelent e testek esetében a dualitás? Mely testek duálisai egymásnak?
Igen érdekes e testek térbeli szimmetriáit vizsgálni.

M6: Hány olyan térbeli egybevágósági transzformáció van, mely egy dodekaédert önmagába visz? Ezek közt hány síkra vonatkozó tükrözés van?
Ehhez a témarészhez kapcsolódik az 5. bemelegítő feladat is.

Újabb testeket kaphatunk, ha megengedjük, hogy a lapjaik legalább kétféle szabályos sokszög közül kerüljenek ki, melyeknek oldalai ugyanakkorák, de a poliéder csúcsaira vonatkozó megkötést meghagyjuk. Ezeket a testeket **féligszabályos test**eknek vagy **arkhimédeszi test**eknek nevezzük. (Kivétel: prizmákra és antiprizmákra nem használják e kifejezést, pedig a fenti definíció igaz rájuk.) (Nevezik még a most definiált testek duálisait is féligszabályos testeknek – ezek bemutatása itt nem célom.)

M17a gyűjtőmuka: Keresd meg az elnevezés eredetét, gyűjts történeti anyagot e testekről!

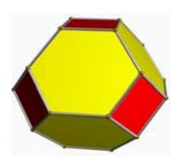
M17b gyűjtőmunka: Milyen poliédereket neveznek prizmáknak és antiprizmáknak? Mi a Schäfli-szimbólum?

Szeretnénk egy olyan féligszabályos testet készíteni, melynek minden csúcsában két szabályos hatszög és egy négyzet találkozik. Számítsuk ki, hogy létezik-e ilyen test, s ha igen, hány négyzet és hány hatszög kell hozzá!

Jelölje x a szükséges négyzetek, y a hatszögek számát! A lapok száma $x+y$. A poliédercsúcsokat összeszámolhatjuk úgy, hogy a négyzetek összes csúcsainak számát tekintjük: $4x$-*nek*, de úgy is, hogy a hatszögek összes csúcsainak számát elosztjuk kettővel, mert egy poliédercsúcsban két hatszögcsúcs "olvad össze": $\frac{6y}{2}=3y$

A poliéderélek száma (mivel két-két sokszögoldal felel meg egy poliéderélnek) az összes sokszögoldal számának fele: $\frac{4x+6y}{2}=2x+3y$. Ezután felírhatjuk az Euler-tételt és a csúcsok számára vonatkozó két képletet, így egy egyenletrendszert kapunk:

$$\left.\begin{aligned}(x+y)+(4x)&=(2x+3y)+2\\ 4x&=3y\end{aligned}\right\}$$

Az egyenlet megoldása x=6 és y=8. Tehát ha létezhet ez a test, 6 négyzetből és 8 hatszögből áll. A kapott eredmény csak szükséges feltétel (Tudjuk, hogy a féligszabályos testek körében az Euler-tétellel kapott szükséges feltétel elégséges is a létezéshez). Íme a test neve csonka oktaéder:

M18: Számoljuk ki az Euler-tétellel, létezhet-e olyan féligszabályos test, melynek egy csúcsában 4 szabályos háromszög és 1 négyzet találkozik? Ha igen, mennyi négyzet- és mennyi háromszöglapja lehet?

M19: Számoljuk ki az Euler-tétellel, létezhet-e olyan féligszabályos test, melynek egy csúcsában 1 négyzet, 1 szabályos hatszög és 1 szabályos tízszög találkozik? Ha igen, mennyi négyzet- mennyi ötszög- és mennyi tízszöglapja lehet?

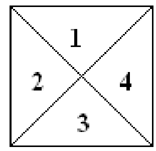
M20: Keresd ki (akár a függvénytáblázatból) a szabályos testek beírt gömbjének sugarát, a felszínét és a térfogatát! Keress összefüggést e három adat között, általánosítsd és igazold a talált tételt!

Kapcsolódó anyagok, weboldalak:
http://library.thinkquest.org/08aug/00157/
http://www.sulinet.hu/tart/cikk/Se/0/14726/3
http://hu.wikipedia.org/wiki/Szab%C3%A1lyos_test
http://hu.wikipedia.org/wiki/Arkhim%C3%A9deszi_testek
http://slc.pszk.nyme.hu/file.php/5/munkalap1/arkhim.rtf

Megoldások, eredmények

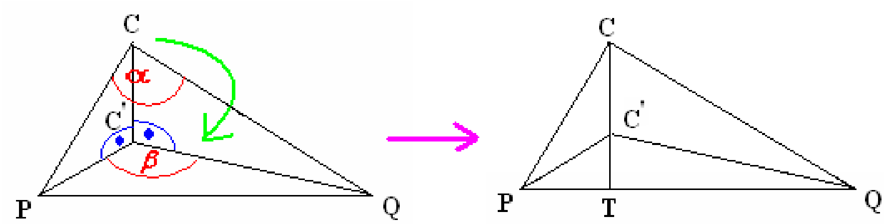
M11: Nem létezhet, mert az élek száma $\frac{3\cdot 17}{2}=25{,}5$ lenne, de ez nem egész.

M12: Felülnézetben mutatja az ábra a testet. Három alapvető eset van:



a) 1, 2, 3 és 4 részek négy különböző színnel vannak festve. Ez 6*5*4*3 eset, melyet 4-gyel osztani kell az elforgatás miatt, azaz 90 eset, az alaplapot mindegyiknél 2-féleképp festhetjük, ez 180 eset.
b) Ha 1, 2, 3 és 4 három különböző színnel van festve, akkor a két azonos szín szemben kell, hogy legyen. E két azonos mezőt hatféle színnel színezhetjük, a másik kettőt 5*4-féleképp, az alaplapot már csak 3-féleképp folytathatjuk. Ez 6*5*4*3=360 eset. Itt elforgatott esetek nem esnek egybe!
c) Ha 1, 2, 3 és 4 mezőkön két szín van, akkor a szemközti mezők azonosak, az elforgatás miatt a sorrend nem számít, csak ki kell választani a két színt, tehát $\binom{6}{2}=15$ lehetőség van. Az alaplap mindig 4-féleképp színezhető tovább, így 15*4=60 eset lesz.
Ez 180+360+60=600 lehetőség.

M13: Egy C konvex csúcsnál a testet vágjuk el olyan síkkal, amely mindegyik befutó élet elvágja! (Ilyen síkot találhatunk például, ha a három legrövidebb CA, CB, CD él A, B és C végpontjain áthaladó síkot közelítjük a csúcshoz.) A vizsgált C csúcsnál levő szögeknek e síkra eső merőleges vetületeinek összege 360°, már csak azt kellene belátni, hogy mindegyik szög vetülete nagyobb az eredetinél. Legyen α=PCQ egy ilyen szög, β=PC'Q



pedig a vetülete. PC'C és QC'C derékszögű háromszögek magasságainak közös talppontja Legyen C ekkor TC'C egy derékszögű háromszög, melyben TC>TC'. Forgassuk el C-t a PQ egyenes körül, míg PCQ háromszög síkjába kerül. Ekkor T, C' és C egy egyenesen lesz, könnyű látni, hogy TCP<TC'P és TCQ<TC'Q. Emiatt α<β.

M14: Csak a mintaképp megadott egyenletet kell átírni, megoldani.

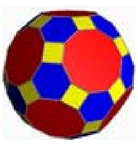
M15: http://nepszerukemia.elte.hu/alkimia_Jalsovszky.pdf
http://hu.wikipedia.org/wiki/Szab%C3%A1lyos_test
http://hu.wikipedia.org/wiki/Szab%C3%A1lyos_test#Dualit.C3.A1s_a_szab.C3.A1lyos_testek_k.C3.B6z.C3.B6tt

M16: Egy A csúcsot és három B, C, D szomszédját, valamint egy P csúcsot és három Q, R, S szomszédját kiválasztjuk. A-hoz rendeljük P-t, B-hez Q-t, C-hez R-et, D-hez S-et. Ez egyértelműen megad egy egybevágósági transzformációt, mely a dodekaédert önmagába viszi. Így csak e hozzárendeléseket kell figyelni. 30 csúcs van, így egy rögzített A-hoz 30-féle P-t választhatunk, a B, C és D -hez 3!-féleképp rendelhető a Q, R, S pont. Tehát

20*6=120 ilyen transzformáció van. A második kérdéshez azt figyeljük, meg, hogy minden szimmetriasík csak két élet tartalmaz. Minden él pontosan egy szimmetriasíkban van benne, s minden szimmetriasík két élet tartalmaz. Mivel 30 él van, ezért 30/2=15 ilyen szimmetriasík lesz.

M17: http://samsara-sacraesphaerae.blogspot.com/2009/01/13-arkhimdeszi-test.html
http://hu.wikipedia.org/wiki/Arkhim%C3%A9deszi_testek
http://hu.wiktionary.org/wiki/f%C3%A9lig_szab%C3%A1lyos_test

M18: Legyen x db háromszög és y db négyzetlap! A csúcsok kétféle összeszámolásával: $\frac{3x}{4} = 4y$, az Euler-tétellel: $4y + (x + y) = \frac{3x + 4y}{2} + 2$. Ebből: x=32, y=6, az ábrán látható a test.

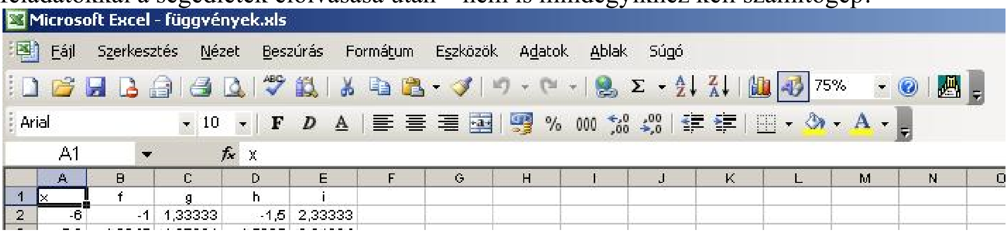


M19: Legyen x db négyzet, y db hatszög és z db tízszöglap! A csúcsok háromféle összeszámolásával: $4x = 6y = 10z$, az Euler-tétellel: $4x + (x + y + z) = \frac{4x + 6y + 10z}{2} + 2$. Ebből: x=30, y=20, z=12, az ábrán látható a test.

M20: http://hu.wikipedia.org/wiki/Szab%C3%A1lyos_test
Kössük össze a beírt gömb K középpontját a csúcsokkal! Így olyan gúlákra bontottuk a testet, amelyek alaplapja az eredeti sokszög egy lapja, a magasságuk pedig a beírt gömb ρ sugara. Ezek térfogatainak összegzésével adódik, hogy $V = \frac{A \cdot \rho}{3}$, ez minden olyan test esetén igaz, melynek van beírt (minden lapját érintő) gömbje.

Excel-matek

Többször előfordult velem, hogy matematikai jellegű problémám akadt, amelynél nem volt szükség a megoldás levezetésére, csak magára a megoldásra. Ilyen esetekben többször nyúltam informatikai eszközökhöz. Más alkalommal csak sokat kellett volna számolnom, s emiatt szorultam a számítógép segítségére. Az ilyen jellegű problémák esetén jól használható matematikai szoftver a Maple, a GeoGebra vagy a Derive, de ezeket fel kell tölteni gépünkre, s használatukat meg kell tanulni, hogy hasznukat vehessük. Néhány egyszerű problémában a jól ismert táblázatkezelő – esetünkben az Excel – is segíthet. Erről lesz szó ezen a munkalapon. Aki nem járatos az Excelben, az is megpróbálkozhat a feladatokkal a segédletek elolvasása után – nem is mindegyikhez kell számítógép!



I. Egy alkalommal diákoknak kellett geometriai feladatokat feladnom, s szerettem volna, ha egy háromszög oldalai egészek és a háromszög területe is egész. Az egyszerűség kedvéért ehhez két olyan derékszögű háromszöget kerestem, melynek oldalai egész számok, s az egyik befogójuk egyenlő és páros.

M21a: Miért oldja meg a gondot két ilyen derékszögű háromszög?
M21b: Vajon minden „egész oldalú" és egész területű háromszög előáll a keresett típusú két derékszögű háromszögből?
Pitagorasz tételét alkalmazva pozitív egész megoldásokat kerestem az $a^2+b^2=c^2$ egyenletre. E feladat pozitív egész megoldásait **pitagoraszi számhármasok**nak nevezzük. Ismerem a módszert, ahogyan pitagoraszi számhármasokat kaphatok: veszek két pozitív egészet, melyet *m*-mel és *n*-nel jelölök, s úgy választom őket, hogy $m>n$ teljesüljön. A két befogót a következő két képlet adja: $\boldsymbol{a=2mn}$, továbbá $\boldsymbol{b=m^2-n^2}$, az átfogó pedig: $\boldsymbol{c=m^2+n^2}$

M22a: Igazoljuk, hogy az így felírt oldalhosszak valóban derékszögű háromszöget adnak meg!
M22b: Mely *m* és *n* értékek esetén lesz a háromszög oldalhosszainak legnagyobb közös osztója 1?
M23: Igazoljuk, hogy bármely 2-nél nagyobb pozitív egész szám szerepel befogóként valamelyik pitagoraszi számhármasban!
Szerettem volna, ha az Excel kiszámol sok pitagoraszi számhármast.
Az első két oszlopban szerettem volna a sorban következő *m* és *n* értékeket látni, az utána levő oszlopokban pedig az a, b és c háromszögoldalakat. Ehhez az $m=2$ és $n=1$ esetet beírtam, majd öt megfelelő képletet írtam az alatta levő sorba, aztán ezt a képletet a 101. sorig lemásoltam, így a képen látható táblázat keletkezett.

m	n	a	b	c
2	1	4	3	5
3	1	6	8	10
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	2	16	12	20
4	3	24	7	25
5	1	10	24	26
5	2	20	21	29
5	3	30	16	34
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	2	24	32	40

	A	B	C	D	E
1	a	b	c	Testátló	Egész-e?
2	3	2	1	3,741657	nem
3	4	2	1	4,582576	nem
4	4	3	1	5,09902	nem
5	4	3	2	5,385165	nem
6	5	2	1	5,477226	nem
7	5	3	1	5,91608	nem
8	5	3	2	6,164414	nem
9	5	4	1	6,480741	nem
10	5	4	2	6,708204	nem
11	5	4	3	7,071068	nem
12	6	2	1	6,403124	nem
13	6	3	1	6,78233	nem
14	6	3	2	7	IGEN
15	6	4	1	7,28011	nem
16	6	4	2	7,483315	nem

M24: Készítsd el az előző táblázatot! Az Excel következő részeit használd hozzá: alapműveletek, relatív hivatkozás, HA függvény! (Ha nem vagy tisztában ezek működésével, nézd át az Excel-segítség fájlt!)

M25a: Kerestess az Excellel olyan téglatesteket, amelyeknek élei különböző *n*-nél kisebb egész számok és testátlójuk is egész szám! Legyen n=11 (Lásd az ábrát!).

M25b: Hogyan függ *n*-től a szükséges sorok száma?

II. Egy másik alkalommal harmadfokú egyenletet kellett volna megoldanom középiskolás szinten. Ehhez tudtam, hogy ha megtalálok egy gyököt, akkor eggyel alacsonyabb (tehát másod-) fokú egyenletre vezethetem vissza a feladatot. Ennek módszere a polinomosztás, amit alább bemutatok. Ha például az

$x^3 + x^2 - 72\,x + 180=0$

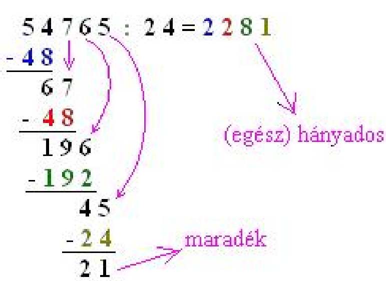
egyenletről feltételezzük, hogy három egész megoldása van, akkor azok osztói kell legyenek a konstans tagnak.

M26: Igazold, hogy ha egy harmadfokú polinom minden együtthatója egész és három egész zérushelye (gyöke) van, akkor a konstans tagnak mindhárom gyök osztója!

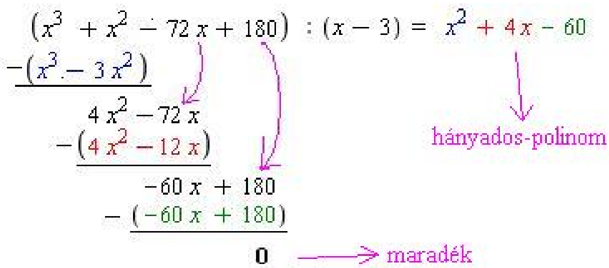
A fenti egyenlet esetén könnyen rábukkanhatunk az x=3 gyökre (az Excel segít ebben!). A polinom felírható kell, hogy legyen $(x\text{-}3)\cdot p(x)$ alakban, ahol $p(x)$ egy másodfokú polinom.

M27: Igazold, hogy ha egy harmadfokú polinomnak gyöke g, akkor a polinom felírható (x-g)·p(x) alakban, ahol p(x) egy másodfokú polinom!

A feladat tehát az, hogy $x^3+x^2-72x+180=(x-3)\mathrm{p}(x)$ alakba írjuk a polinomot. A polinomosztás módszere leolvasható a következő két ábráról, az általános iskolai írásbeli osztást kell utánozni, annyi különbséggel, hogy egy kapott hányadost mindig vissza kell szorozni, és az osztandó megmaradt részéből le kell vonni. A polinomok esetében a hányados-polinom következő tagját mindig az osztandóból maradt rész és az osztó legmagasabb fokszámú tagjainak hányadosa adja:

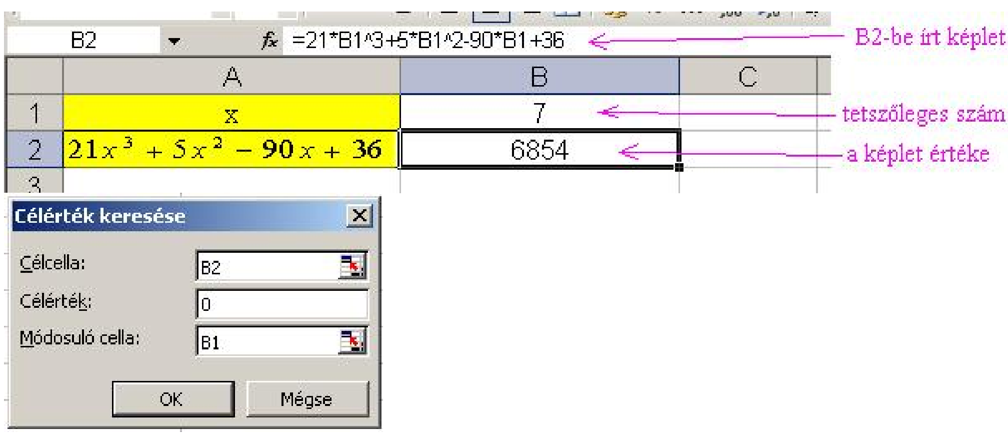


Ennek mintájára:



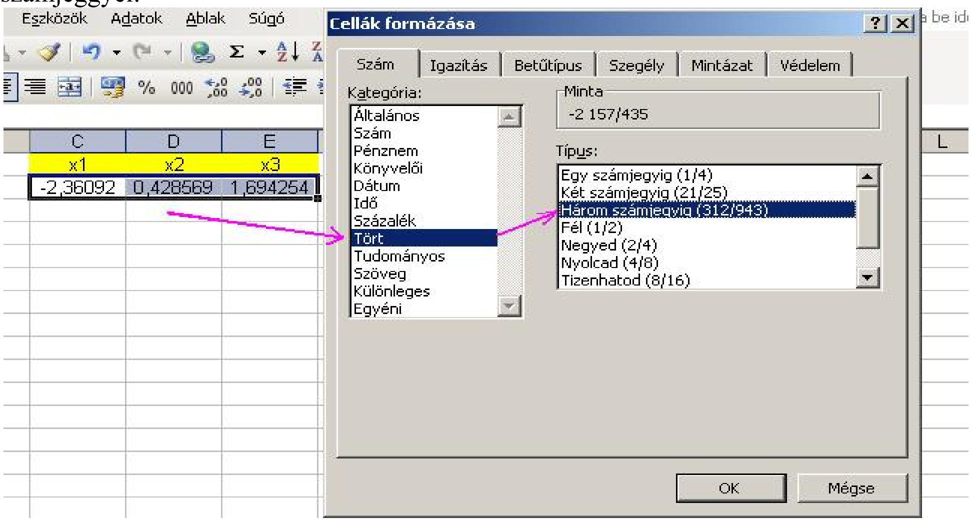
Ezekből következik, hogy $x^3+x^2-72x+180=(x-3)(x^2+4x-60)$, tehát egy másodfokú egyenletet kell már csak megoldani. A végső gyökök így: 3, -10 és 6.

M28: Oldd meg az x3+12x2−108x−1120=0 egyenletet a fenti módszerrel!
Bonyolultabb a helyzet, ha csak annyit tudunk, hogy az egyik gyök racionális – esetleg több gyök nincs is. Legyen példánk erre a $21x^3+5x^2-90x+36=0$ egyenlet. Ilyen esetben nem használható az *M16* állítás. Bár ismert olyan állítás, mely szerint a racionális gyökök számlálója a konstans tagnak, a nevezője pedig a főegyütthatónak osztója, de ez egyrészt túl sok esetet ad, másrészt most alkalmat keresünk, hogy az Excel egy új lehetőségét ismerhessük meg. A célértékkereső Excel-eszközt fogjuk használni. A magasabbfokú egyenlet bal oldalát úgy írjuk be az egyik (pl.: a B2) cellába, hogy az *x* ismeretlen minden előfordulási helyén ugyanarra (pl.: a B1) cellára hivatkozunk. E cellába bármilyen adatot beírhatunk (akár 7-et is). Ezután az Eszközök menü Célértékkeresés menüpontját választjuk. Az ábra szerint töltjük ki a két cellát és a párbeszédpanelt:



Ha az OK gombbal elindítjuk a célértékkeresést, akkor az Excel megpróbálja a módosuló cellaként megadott cellában úgy változtatni a cella tartalmát, hogy a célcellában a célérték álljon a képlet eredményeként. (Ehhez persze az kell, hogy a célcella egy hivatkozást tartalmazzon a módosuló cellára, vagy hogy a belőle induló hivatkozási láncban szerepeljen a módosuló cella.) Az Excel kereső algoritmusa akkor áll le, ha a célértéket 3 tizedesjegy erejéig közelíti a módosuló cella értéke, vagy ha „reménytelennek ítéli” a gép a célérték elérését.

Ha a fenti adatokkal elindítjuk a célértékkeresést, akkor 1,69425492311333 értékkel áll le a gép. Ha 0-val indítjuk, akkor 0,428569468861206 értéket ad. Ha pedig -10 értékkel indul, akkor -2,36092105953484 érték jön ki. Ez a három gyök közelítő értéke. Lehet-e köztük racionális?
Bemásoltam a C2, D2, E2 cellákba a három eredményt, majd a három cellára cellaformázásként a számformátumon belül a törtformátumot választottam három számjeggyel:



Az eredmény:

C	D	E
x1	x2	x3
-2 157/435	3/7	1 302/435

A kapott három tört közül a 3/7-ről behelyettesítéssel kiderül, hogy PONTOS gyök. Így polinomosztással adódik a következő: $21x^3+5x^2-90x+36=(7x-3)(3x^2+2x-12)$.
Tudjuk, hogy egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényező nulla, tehát a másodfokú tényező gyökeivel együtt a harmadfokú egyenlet PONTOS gyökei:

$$\frac{3}{7};\ \frac{-1+\sqrt{37}}{3};\ \frac{-1-\sqrt{37}}{3}.$$

M29: Oldd meg a $78x^3-22x^2-211x+120=0$ egyenletet a fenti módon, ha tudjuk, hogy van racionális gyöke!
M30: Oldd meg az $55x^4+228x^3-528x^2-583x-756=0$ egyenletet a fenti módon, ha tudjuk, hogy van legalább két racionális gyöke!

Az itt megoldott két probléma Excel-fájlja:
http://slc.pszk.nyme.hu/file.php/5/munkalap2/Excel-matek.xls

Internetes segítségek az Excelhez:
http://m-forum.hu/downloads/elmelet/Hivatkozasok_fuggvenyek.pps
http://www.akg.hu/info/excel/index.html
http://www.hatekonysag.hu/blog/excel-abszolut-relativ-vegyes-hivatkozasok.htm
http://ecdlweb.hu/index.php?title=Excel_2000_-_Cellahivatkoz%C3%A1sok

A Fibonacci-sorozat és az aranymetszés

A középkor egyik legtehetségesebb matematikusa volt Fibonacci (szül.: Pisa, kb. 1170 – kb. 1250, más nevein Leonardo di Pisa vagy Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci, Leonardo Fibonacci), olasz matematikus. Liber Abaci című könyvében említi a következő feladatot:

Nyulakat tenyésztünk a következő (elméleti) feltételek mellett:

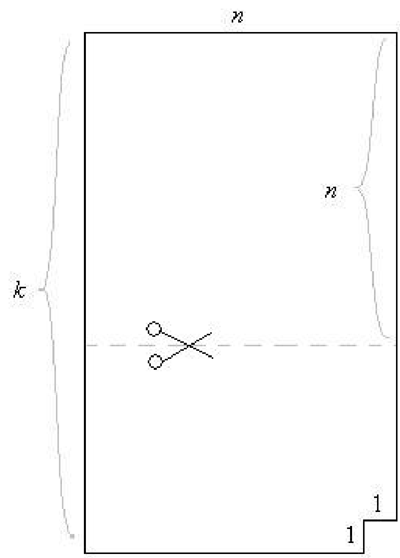
- az első hónapban egyetlen újszülött nyúl-pár van;
- az újszülött nyúl-párok két hónap alatt válnak termékennyé;
- minden termékeny nyúl-pár minden hónapban egy újabb párt szül;
- és a nyulak örökké élnek?

Hány pár nyulunk lesz *n* hónap múlva?

A havonkénti nyúlpárok számát a következő sorozat mutatja:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Ezt az $\{F_n\}$ sorozatot nevezik Fibonacci-féle sorozatnak. A sorozatnak érdekes tulajdonságai vannak, a matematika számos területén felbukkan.



M31a: Igazoljuk, hogy a fenti Fibonnacci-féle feladat megoldása olyan F_n sorozat, amelyet az $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ képlet jellemez!

M31b: Hányféleképpen mehetünk fel egy 10 lépcsőfokból álló lépcsőn, ha egy lépésre egy vagy kettő lépcsőfokot léphetünk?

M32: Számoljuk ki és ábrázoljuk a Fibonacci-sorozat elemeit táblázatkezelő segítségével! Írassuk ki és ábrázoltassuk a sorozat első *n* elemének összegét és reciprok-összegét!

M33a: Tekintsünk egynél nagyobb *n* és *k* egészeket, készítsünk egy *n*k* méretű téglalapot, amelynek a bal alsó sarkából kivágunk egy 1*1-es négyzetet. Vágjuk le a téglalapból a lehető legnagyobb négyzetet a jobb felső saroktól kezdve! (Lásd az ábrát!) Ezután újra ugyanilyen módon vágunk a maradék téglalapból, addig folytatjuk, amíg a „csonka" téglalapot fel nem daraboltuk négyzetekre. Mely *n* és *k* értékek esetén keletkeznek csupa különböző négyzetek?

M33b: Az iménti feladat eredményét felhasználva írjunk fel képletet az $F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2$ összegre!

Sorozatokkal kapcsolatos (így a Fibonacci-sorozattal kapcsolatos) állítások igazolásához is hasznos segítség a **teljes indukció** módszere. E módszert többnyire a pozitív egész számok halmazának egy végtelen részhalmazára tett állítások igazolására használják.

A Fibonacci-számokat vizsgálva például megfigyelhetjük, hogy:

$1 = 2-1$

$1+1 = 3-1$

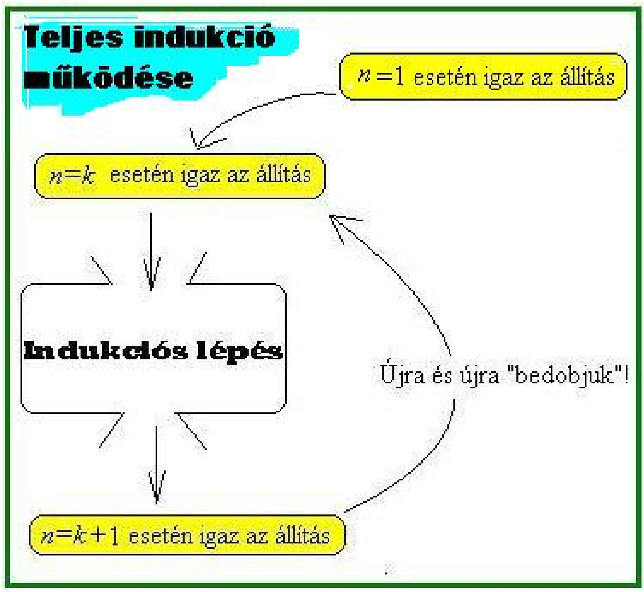
$1+1+2 = 5-1$

$1+1+2+3 = 8-1$

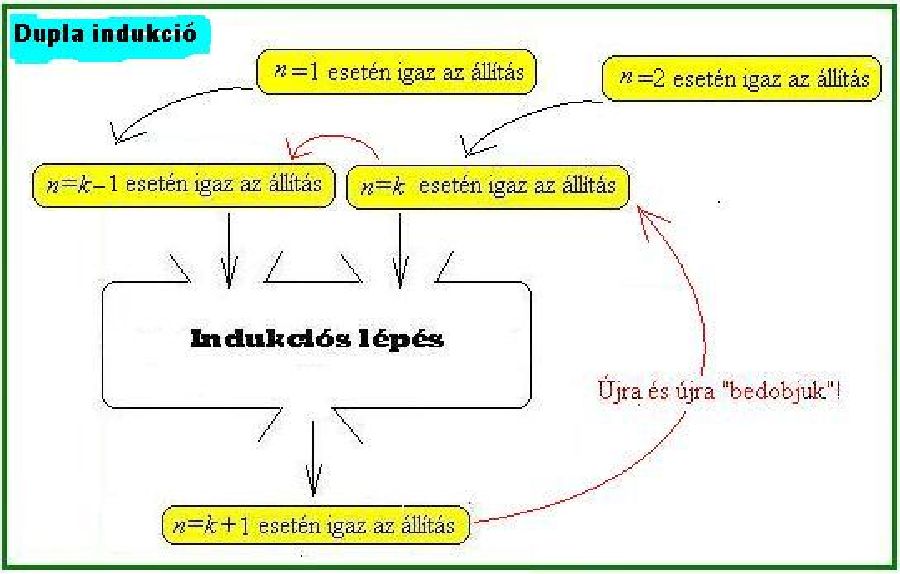
1+1+2+3+5 = 13-1
1+1+2+3+5+8 = 21-1
Megfogalmazódik az a sejtésünk, hogy
$F_1+F_2+\ldots+F_n = F_{n+2}-1$

Bemutatjuk, hogyan lehet ezt teljes indukcióval belátni. Az n=1; 2; 3; 4; 5; 6 esetekre fentebb megvizsgáltuk, hogy igaz az állítás.
Tételezzük fel, hogy $n=k$ értékig már igazoltuk a sejtést, és igaznak bizonyult. Ez azt jelenti, hogy $F_1+F_2+\ldots+F_k = F_{k+2}-1$ teljesül, ha n=1; 2; 3; ...k.
Ezután e feltétel (indukciós feltevés) felhasználásával igazoljuk, hogy k+1 esetén is teljesül az állítás:
$F_1+F_2+\ldots+F_k+F_{k+1}=(F_1+F_2+\ldots+F_k)+F_{k+1}=(F_{k+2}-1)+F_{k+1}=(F_{k+1}+F_{k+2})-1=F_{k+3}-1$

Tehát ha valamely n számra teljesül az állítás, akkor ebből következik, hogy az $n+1$-re is igaz. E „bizonyítás-váz” bármely n-re elmondható, s úgy működik, mint egy gép:



A Fibonacci-sorozat esetében minden elemet két megelőző határoz meg, ezért számíthatunk rá, hogy bonyolultabb állítások igazolásához esetleg vissza kell menni még egy lépéssel a k–1. elemig. A második „gép” ábrája azt mutatja, hogyan megy a bizonyítás „dupla” indukcióval.



Erre a dupla indukcióra látunk egy példát a következő helyen:
http://slc.pszk.nyme.hu/mod/resource/view.php?id=108

M34: Igazoljuk a következő állítást teljes indukcióval: $F_n | F_{2n}$
M35: Igazoljuk a következő állítást teljes indukcióval: $F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1}$
Felvetődik a kérdés, hogy létezik-e olyan képlet, amellyel az *n* ismeretében a Fibonacci-sorozat *n.* elemét közvetlenül kiszámíthatjuk, azaz „megspórolhatjuk-e" valahogyan az összes előző elemek kiszámítását?
Ha az M35-ben szereplő képlet alapján dolgozunk, akkor kihagyhatunk elemeket, de így is ki kell számolni néhány elemet, s sok ügyeskedésre is szükség van!

M36: Számítsuk ki az M35 képletének felhasználásával, minél kevesebb közbülső elem kiszámításával, az F_{99} értékét! (Az első 10 elem értékét fentebb megadtuk.)
Az M32 feladatot megoldva exponenciális függvényhez hasonló grafikont kaphattunk. Lehetséges, hogy a keresett képlet egy exponenciális függvény szabálya? Ha ez igaz lenne, akkor az *n.* elem *n*-edik gyöke mindig ugyanaz a szám lenne – az exponenciális függvény alapja.

Ha az Excellel kiíratjuk a $G_n = \sqrt[n]{F_n}$ sorozat értékeit, látjuk, hogy ez csupa különböző eredményt ad, de az *n*-et növelve egyre közelít egy értékhez. Lehet, hogy az exponenciális függvényt egy konstanssal szoroztuk, azaz egy mértani sorozatról van szó? Ez esetben két-két szomszédos elem hányadosa mindig megegyezne, s a kvóciens (*q*) értékét adná.

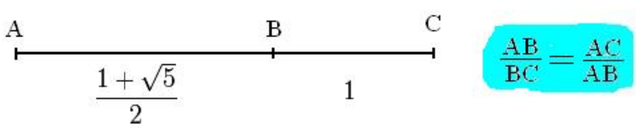
Ha az Excellel kiíratjuk a $H_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ sorozat értékeit, látjuk, hogy ez is csupa különböző eredményt ad, de az *n*-et növelve sokkal gyorsabban közelít egy számhoz – ugyanahhoz az értékhez, mint az előbb!
Ezek szerint a Fibonacci-sorozat „kevéssé" tér el egy mértani sorozattól, melynek *q* hányadosa körülbelül 1,618.

Ha a sorozat elemeit $F_n=p.q^n$ alakban szeretnénk közelíteni, ez lehetséges az előzőek alapján, és p értéke is nagy pontossággal meghatározható.

M37a: Végezzük el az Excellel a most leírt három közelítést, adjuk meg az Excel pontosságával q és p értékét megfelelően sok sorozatelem alapján! Hány elem kell ehhez? Mellékeljük a megfelelő Excel táblázatot!
M37b: Számítsuk ki a fenti p és q értékkel a $p.q^n$ sorozat elemeit! Kerekítsük az elemeket egészre! Melyik elemtől kezdve ad pontatlan értéket a Fibonacci-sorozat elemeire? Mellékeljük a megfelelő Excel táblázatot! Lehet a hiba oka az Excel pontatlansága?
Fordítsuk meg a kérdést! Ha egy $\{a_n\}$ sorozat $p.q^n$ alakú, teljesülhet rá az $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ képlet? (Nevezzük el ezt a képletet **Fibonacci-féle rekurzió**nak!)
Ez a következő egyenlőséget adja: $p \cdot q^{n+1} = p \cdot q^n + p \cdot q^{n-1}$
Osszuk el mindkét oldalt $p.q^{n-1}$ -nel! q-ra nézve másodfokú egyenlőséget kapunk: $q^2=q+1$.
Két megoldása van:

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

M38a: Mutassuk meg, hogy minden $a_n = x \cdot q_1^{\ n} + y \cdot q_2^{\ n}$ alakú sorozatra teljesül a Fibonacci-féle rekurzió (ahol x és y tetszőleges valós számok)!
M38b: Keressük meg azt az x és y értéket, amelyre teljesül, hogy az M38a-ban szereplő sorozatra $a_1=1$ és $a_2=1$!
Az *M38a*-ban igazolt tulajdonság miatt az *M38b*-ben talált sorozat azonos a Fibonacci-féle sorozattal, hiszen az első két elem megegyezik, s a rekurzió szerint minden elemet az előző kettőből ugyanaz a képlet számítja.
A fentebb megtalált $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ számnak több érdekes tulajdonsága van. Ha az alábbi ábra szerint egy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hosszúságú AB szakasz mellé teszünk egy egységnyi hosszúságú BC szakaszt, akkor a nagyobbik szakasz annyiszorosa a kisebbiknek, mint ahányszorosa az



együttes AC szakasz a nagyobbiknak. Ezt már az ókorban tudták, s azt mondták, hogy ebben az esetben az AC szakasz B osztópontja az **aranymetszési pontjában** van. Egy AC szakasz ilyen arányú felosztását az ókor óta harmonikus, esztétikai értékeket hordozó tökéletes arányként tartják számon. Ez az arány az állat- és növényvilágban is számos formában megjelenik. Sok művész tudatosan alkalmazza az irodalom és a zene területén is, bizonyított tény, hogy több zenemű, költemény aranymetszési pontjában van a mű fordulópontja. Találkozhatunk vele a geometria területén belül is, például a szabályos ötszögben.

M39: (kutatómunka) Gyűjts történeti anyagot az aranymetszésről! Hol jelenik meg az egyes tudományokban, a művészetekben, a természetben?

M40: Igazold a Fibonacci-sorozat M38b-ben megtalált zárt képlete alapján, hogy a Fibonacci-féle számok megkaphatók úgy, ha egészre kerekítjük a következő sorozat elemeit:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

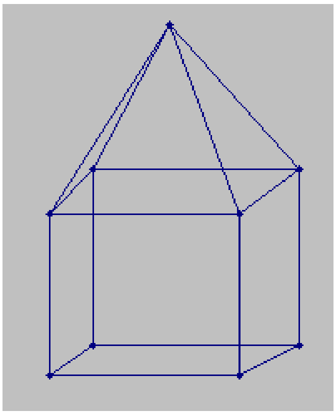
Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy a Fibonacci-sorozat szomszédos elemeinek hányadosai egyre pontosabban közelítik az aranymetszés számát. Ha tehát például olyan verset szeretnénk írni, melynek fordulópontja a vers aranymetszési pontjában van, akkor ezt könnyen megtehetjük, ha úgy intézzük, hogy a vers fordulópontja előtti és utáni sorainak száma két szomszédos (lehetőleg nagy) Fibonacci-szám legyen.

Kapcsolódó linkek:

Fibonacciról: http://http/hu.wikipedia.org/wiki/Fibonacci

A Fibonacci-sorozatról: http://index.hu/tudomany/fib0407/

Építsünk házat!

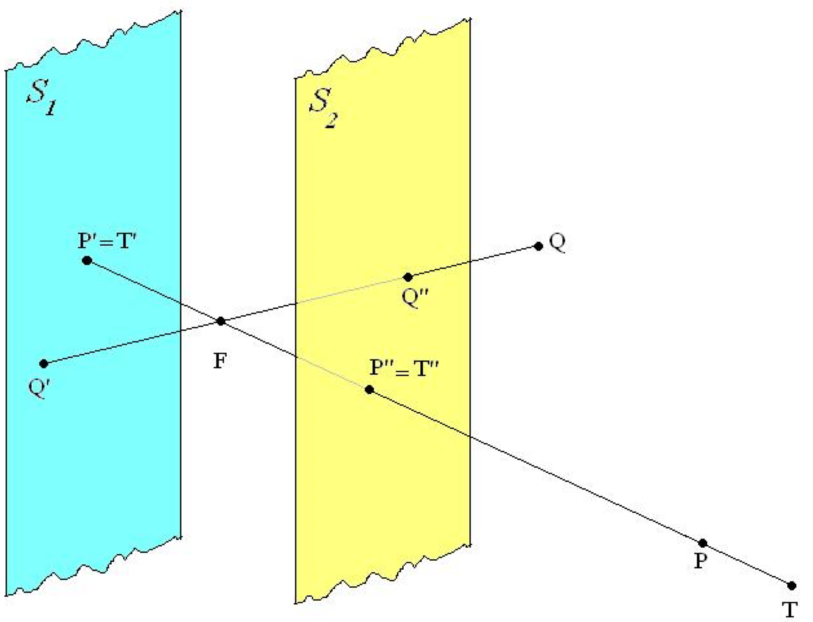


Biztosan játszottál már olyan játékszoftverrel, amelyben térbeli testek között mozoghattál, szobákban, épületek között járkálhattál, s a képernyő „valóságosan” mutatta, mit látsz éppen. Hogyan lehet egy térbeli alakzat képét síkban megjeleníteni, kirajzolni, hogy az „élethű” legyen? Erről szól ez a munkalap. (Megértéséhez a síkbeli koordinátarendszer ismeretére és a vektorok alapvető ismeretére van szükség.)

Az élethű ábrázolás jelentse most azt, hogy olyan képet ad egy testről, mint amit a szemed alkot róla. A fényképezőgép alkotta síkbeli kép is azért élethű, mert a szem képalkotását utánozza. Ennek modellezéséhez tehát először tehát a szem (a fényképezőgép, a tükrök stb.) képalkotásával érdemes megismerkedni.

Erről szól a fizika tehetséggondozás első feladatlapja.

Hogyan keletkezik a kép a szemünkben? Tekinthetjük úgy, mintha minden térbeli P pontot egy vászonra vagy a szem esetében a retinára vetítenénk – matematikai értelmezéssel egy S síkra vetítünk, a szemlencse F fókuszpontján és a P ponton átmenő egyenessel. Egy P pont képe tehát úgy keletkezik az adott S síkon, hogy a rögzített F ponton átmenő PF egyenesnek tekintjük az S síkkal való döféspontját, ez a P pont P' képe.



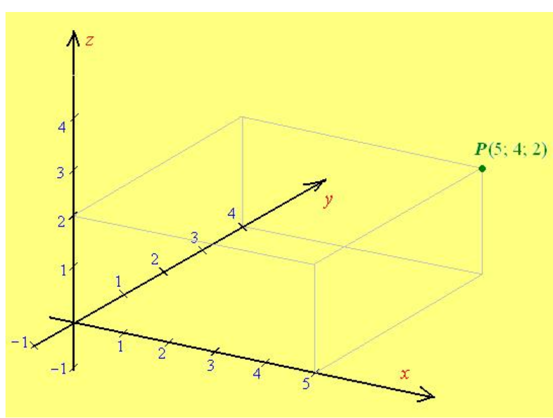
Az ábrán egy P, egy Q és egy T pont vetített képét láthatjuk. Ha e pontokból érkező fénysugarak az F ponton áthaladnak, akkor az S_1-gyel jelzett síkon keletkezik a képük: P', Q' és T'. (F modellezheti itt a szemlencse fókuszpontját, S_1 modellezheti a retinát a szemben). Az S_1 síkon fordított állású képet kapunk. Az ábrán szemléletesen is megjelenik, hogy helyet cserél például a „fent” és a „lent”. Ha azt az S_2 síkot tekintjük, mely S_1-gyel párhuzamos, és F-től ugyanolyan távolságra van F „túloldalán” (vagyis e sík S_1-nek F-re vonatkozó tükörképe), akkor az e síkon kapott kép azonos (azaz egybevágó) az S_1-en keletkező képpel, de „egyállású” az eredetijével. Az ábrán a P, Q és T pont esetén, ha a pontokból érkező fénysugarak az F ponton áthaladnak, akkor az S_2-vel jelzett síkon a P'', Q'' és T'' képük keletkezik. Ez a sík lesz megfelelő számunkra, hogy térbeli tárgyak síkbeli képeit megadjuk. (Az agyunk a retinára – azaz az S_1 síkra – vetített „fordított állású” képet úgy alakítja át, mintha az S_2 síkon kapott, „eredetivel egyállású” kép lenne.)
Megfigyelhető az ábrán az is, hogy P és T pontok képe egybeesik, mert F rajta van a PT egyenesen.

A következő feladatoknál az S_2 síkra történő vetítésre teszünk fel kérdéseket:

M41a: Igazoljuk, hogy a most megadott transzformáció egyenestartó, azaz három egy egyenesre eső pont képe mindig egy egyenesre esik!
M41b: Igaz-e tetszőleges pozitív *p* érték esetén, hogy van olyan szakasz, amelyre igaz, hogy képének hossza *p*-szerese az eredeti szakaszhossznak?
M42a: Igazoljuk, hogy a most megadott transzformáció nem aránytartó, azaz $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ **nem teljesül bármely A, B, C, D pont esetén!**
M42b: Adjuk meg olyan feltételt az A, B, C, D pontokra, amelynek teljesülése esetén $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ **mindig igaz!**
M43a: Adjunk meg olyan térbeli háromszöget, amely feleakkora területű, mint a képe!
M43b: Adjunk meg olyan térbeli háromszöget, amely kétszer akkora kerületű, mint a képe!

Vannak olyan pontok is, melyeknek nincs képük, ezekről később esik szó. A most tárgyalt transzformációt a geometriában **centrális projekció**nak nevezik, de nevezhetjük magyarul akár „ponton át síkra vetítésnek” is.

A megfelelő transzformáció tehát megvan, de hogyan lehet térbeli pontokat egy számítógépnek megadni? A legegyszerűbb: térbeli koordináta-rendszerrel. Az általános iskolában tanult síkbeli *xy*-koordinátarendszerhez vegyünk fel egy harmadik tengelyt, vagyis egy „*z*” számegyenest, mely az *xy* síkra merőleges, ugyanolyan skálázású, mint a két eddigi tengely (ugyanakkora rajta az egység), s áthalad az origón. Egy térbeli P pontból



mindhárom tengelyre merőlegest bocsátunk a térben, a merőlegesek talppontjai (a három számegyenesen ezek számok) adják (*x; y; z*) sorrendben a P pont három koordinátáját. Ezek ugyanazok a számok lesznek, mintha a P pont *yz*, *xz* és *xy* síktól vett előjeles távolságát tekintenénk (Lásd az ábrát!).

Hogyan lehet térbeli koordinátákkal számolni?

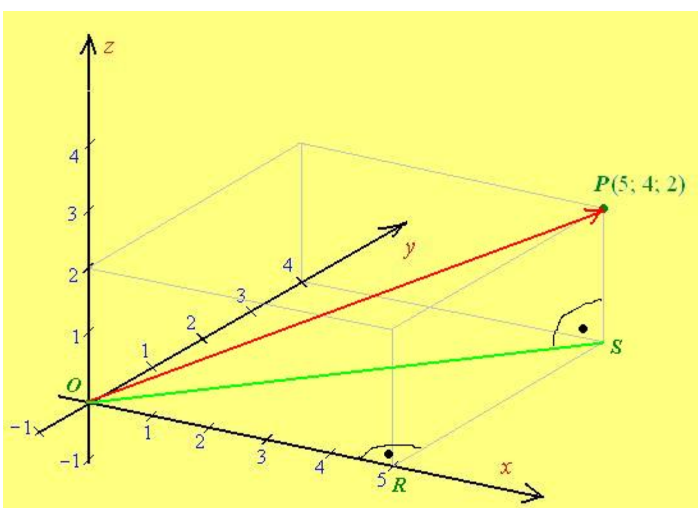
Szeretnénk egyenesekkel, síkokkal dolgozni, szeretnénk eltolást és elforgatást végezni. A legegyszerűbben helyvektorokkal lehet számolni. A helyvektorok origó kezdőpontú vektorok, tehát elég a végpontjuk három koordinátáját megadni, ha jellemezni akarjuk őket. Például az ábrán látható P pontba mutató helyvektor: **v**(5; 4; 2)

Ha egy pontot egy vektorral eltolunk, akkor koordinátánként össze kell adnunk a pont és a vektor koordinátáit. Például ha az ábrán látható P pontot eltoljuk a **w**(3; 10; –8) vektorral, akkor a P'(8; 14; –6) pontot kapjuk.

Két pontot összekötő „szabad” vektort úgy kaphatjuk meg helyvektorként, hogy a vektor végpontjának koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont koordinátáit. Például az A (3; 7; 11) és a B (10; –1; 6) pontok esetében $\overrightarrow{AB}$ = **u**(7; –8; –5).

Egy vektor „számszorosát” úgy kaphatjuk meg, hogy a vektor mindhárom koordinátáját megszorozzuk az adott számmal. Például a **v** (8; –4; 5) vektor másfélszerese (azaz 1,5-szerese) a **v’** (12; –6; 7,5) vektor. Ez **v**-vel egy egyenesbe eső helyvektor, de a hossza másfélszerese az eredeti vektorénak. A szorzószám lehet negatív is, ekkor a kapott vektor hossza ugyanúgy változik, mint pozitív lenne szorzószám esetében, de a kapott vektor az eredetivel ellentétes irányba mutat. Ha a szorzószám 0, akkor a végeredmény **v’** (0; 0; 0) =**0**, azaz nullvektor.

Ha egy térbeli vektor hosszát akarjuk meghatározni, például az $\overrightarrow{OP}$(5; 4; 2) vektorét, akkor az ábrán látható OSR térbeli derékszögű háromszögből kiszámolhatjuk Pitagorasz tételével, hogy OS=$\sqrt{5^2+4^2}$, majd az OSP térbeli derékszögű háromszögből kiszámolhatjuk Pitagorasz tételével, hogy OP=$\sqrt{OS^2+2^2}=\sqrt{5^2+4^2+2^2}=\sqrt{45}$ egység. Általánosságban mondhatjuk, hogy egy vektor hosszát megkapjuk, ha három koordinátájának négyzetösszegéből gyököt vonunk. Ez negatív koordináták esetén is igaz,



hiszen a háromszögek oldalai pozitív számok, és egy számnak és az ellentettjének ugyanaz a négyzete. Könnyű kiegészíteni az okoskodást arra az esetre is, ha a vektornak van 0 koordinátája, a képlet akkor is helyes.
Ha két pont közti szabad vektorból helyvektort készítünk, majd a kapott vektor hosszát kiszámítjuk, megkapjuk az eredeti két pont távolságát!
A következő állítás is érdekes: Ha $\mathbf{a}(x_a; y_a; z_a)$ és $\mathbf{b}(x_b; y_b; z_b)$ vektorok egyike sem nullvektor, akkor merőlegességük szükséges és elégséges feltétele, hogy $x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$ legyen. A bizonyítás a honlapon megtalálható – aki vektorok skaláris szorzatának fogalmát ismeri, annak persze ismert ez az állítás.

M44a: Igazoljuk az eddigiek alapján: Ha egy S síkra az $\mathbf{n}_S(A; B; C)$ (nem null-) vektor merőleges, és a sík egy pontja a P_0 (x_0; y_0; z_0), akkor a tér P(x, y, z) pontjai közül pontosan azok vannak az S síkon, melyekre igaz az $Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$ egyenlőség. (I)

M44b: Az eddigiek és az M44a alapján írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely áthalad a következő három ponton: A(10; 20; 0) , B(11; 7; 5) és C(20;2;2)!

Az *M44a*-ban szereplő egyenlőséget az S sík egyenletének nevezzük, az $\mathbf{n}_S$ vektort pedig a sík (egy) normálvektorának. Ha a sík egyenletében *A*=0, akkor a sík párhuzamos[1] az *x* tengellyel, ha *B*=0, akkor a sík párhuzamos az *y* tengellyel, ha *C*=0, akkor a sík párhuzamos a *z* tengellyel. Ez abból adódik, hogy a leírt három esetben az $\mathbf{n}_S$ vektor merőleges egy megfelelő koordinátatengelyre.
Ha egy *P(x, y, z)* pont koordinátái két nem párhuzamos sík egyenletét egyszerre teljesítik, akkor rajta van a síkok metszésvonalán. Így felírhatjuk egy *e* egyenes egyenletrendszerét, ha két *e*-t tartalmazó sík egyenletét felírjuk.
Van egyszerűbb módszer is. Legyen egy e egyenes egy pontja P_0 (x_0; y_0; z_0) és $\mathbf{v}_e(F; G; H)$ (nem null-)vektor párhuzamos az *e* egyenessel (irányvektora *e*-nek)! Ekkor az egyenes bármely P(*x*; *y*; *z*) pontjának három koordinátáját megkaphatjuk, ha P_0 pontot eltoljuk a $\mathbf{v}_e$ vektor „valahányszorosával”. Jelöljük ezt a szorzószámot *t*-vel! Tehát az egyenesen levő P pontok három koordinátáját a következő képletek adják:

$$\begin{cases} x = Ft + x_0 \\ y = Gt + y_0 \\ z = Ht + z_0 \end{cases} \qquad \textbf{(I I)}$$

Ha *t* értékét tetszőlegesen változtatjuk, akkor a kapott *x*, *y* és *z* értékek mindig az *e* egyenes egy-egy pontjának három koordinátáját adják. A fenti három összekapcsolt egyenlőséget az egyenes egyenletrendszerének nevezzük. Könnyű belátni, hogy az egyenes összes pontja előáll a *t* érték megfelelő megválasztásával, *t*=0 esetén pedig épp a P_0 pontot kapjuk (mert nullvektorral toltuk el).
Keressük meg például az A(2; 5; 8) és B(10; –1; 6) pontokon átmenő egyenes egyenletrendszerét! $\overrightarrow{AB}$ helyvektorként felírva az egyenes egy irányvektora lesz: $\mathbf{v}_e(8; -6; -2)$. Az egyenesen levő P_0 pont legyen az A pont (lehetne ez akár a B is). Így az egyenes egyenletrendszere:

[1] A „párhuzamos” szó ez esetben azt is jelentheti, hogy a sík tartalmazza a megfelelő tengelyt.

$$\begin{cases} x = 8t + 2 \\ y = -6t + 5 \\ z = -2t + 8 \end{cases}$$

Ha például t értékét 5-nek választjuk, akkor x = 42; y = –25; z = –2, vagyis az e egyenesnek egy pontja Q(42; -25; -2).
A fenti egyenletrendszer mindhárom egyenletéből kifejezhetjük t értékét, s egyenlővé tehetjük egymással a kapott képleteket: $\frac{x-2}{8} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-8}{-2} \ (= t)$. Az egyenes egyenletrendszerét ilyen alakban is meg szokták adni. Ehhez persze az szükséges, hogy az irányvektor egyik koordinátája se legyen 0 (mivel ezek a koordináták kerültek a három nevezőbe).

M45: Állapítsd meg a sík egyenlete és az egyenes egyenletrendszere segítségével <u>kétféleképpen is</u>, hogy egy síkba esik-e a következő négy pont: A(5; 1; –5) , B(7; 6; –8) , C(1; 3; 2) , D(–3;17; 10)!
M46: Keresd meg a fenti egyenes következő tulajdonságú pontjait:

a) **rajta vannak az xy síkon,**
b) **az A ponttól négyszer olyan távol vannak, mint a B ponttól,**
c) **az origótól $\sqrt{237}$ egységnyi távolságra vannak,**
d) **az egyenesen levő pontok közül az origóhoz legközelebbi pont!**

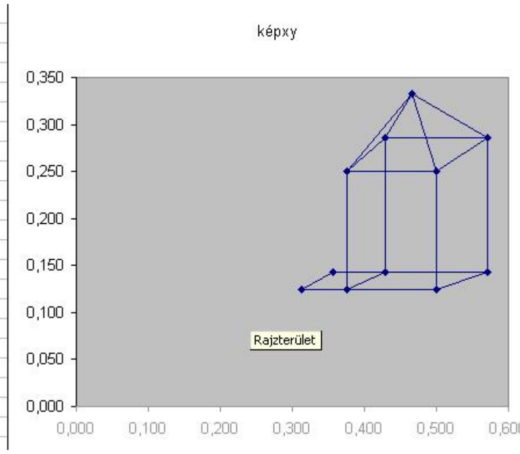
M47: Egy síknak több (I) alakú egyenlete, egy egyenesnek több (II) alakú egyenletrendszere van. Add meg, hogy egy síkegyenletből, illetve egyenes-egyenletrendszerből hogyan kapható meg az összes többi!
Most már eleget tudunk ahhoz, hogy kiszámíthassuk térbeli pontok síkbeli képét. Válasszunk egy síkot, amelyre vetítünk, és válasszunk egy pontot, amelyen keresztül vetítünk!
Legyen az S sík egyenlete $3x–5y+2z$ = 43, a „vetítési" pont pedig az F(4; 1; –2) pont. Határozzuk meg a P(7; 2; 6) pont vetített képét az S síkon! Ehhez az FP egyenes és az S sík döféspontját kell meghatározni. Az $\overrightarrow{FP}$ vektor az egyenes irányvektora: $\mathbf{v}_e(3; 1; 8)$. Az FP egyenes egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = t + 1 \\ z = 8t - 2 \end{cases}$$

A döféspont három koordinátája teljesíti az egyenes egyenletét, tehát oda beírva igaz egyenlőséget ad: $3(3t+4) - 5(t+1) + 2(8t-2) = 43$. Ezt megoldva t=2 adódik, tehát az egyenes egyenletrendszerébe visszahelyettesítve P'(8; 3; 14) a vetületi pont.
Az egyszerűség kedvéért választhatjuk S síknak a z=1 egyenletű síkot és F pontnak az origót. Ekkor a kapott képpontok x és y koordinátáit rögtön meg is jeleníthetjük egy síkbeli koordináta-rendszerben, s az a helyes látott képet fogja adni. Excelben elkészítettem egy olyan munkalapot, amelyben térbeli pontokat lehet koordinátákkal megadni, az Excel kiszámolja a vetületi pontok koordinátáit, s a „*Pont(XY)*" grafikontípus segítségével „drótvázas" test képeként kirajzolja azt.
Arra kellett ügyelni, hogy az egymás után következő pontokat sorban köti össze az Excel szakaszokkal, azok x és y koordinátáiból álló cellapárokat kell megadni. A munkalaphoz tartozó Excel segédfájl bemutatja a *Pont(xy)* grafikon használatát.

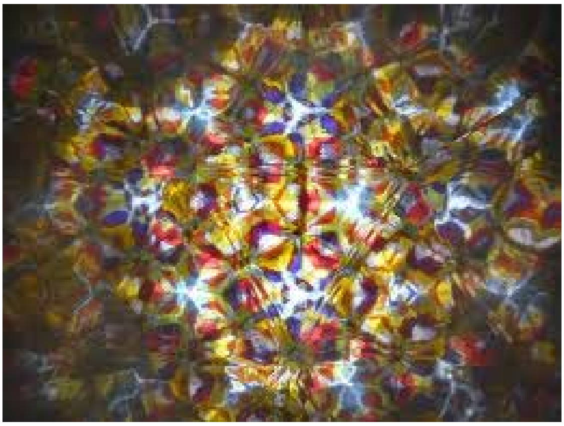
M48a: Készíts egy ilyen Excel munkalapot valamely egyszerű testről!
M48b: A fentiekben szerepelt, hogy bizonyos térbeli pontoknak nincs síkbeli vetített képük. Melyek ezek?
M49: Ábrázoltasd a P(10; 10; –10) és a Q(10; 10; 10) pontokat összekötő szakasz képét az Excellel! Tapasztalatod alapján javíts a munkalapod képletein úgy, hogy ne fordulhasson elő ilyen ábrázolás! („Rossz” helyen levő pontok esetében ne ábrázolja a gép a megfelelő pontokat, használd a HA() függvényt!)
M50: Készíts olyan Excel táblázatot, amely összetettebb alakzat síkbeli képét mutatja! A táblázatot kiegészítheted plusz szolgáltatásokkal is (eltolás, esetleg elforgatás lehetősége)!

	eltolás:		Vektor	20	0	20		
pontok	x	y	z	EltolX	EltolY	EltolZ	képx	képy
1	20	10	50	40	10	70	0,571	0,143
3	5	10	50	25	10	70	0,357	0,143
4	5	10	60	25	10	80	0,313	0,125
6	20	10	60	40	10	80	0,500	0,125
1	20	10	50	40	10	70	0,571	0,143
7	20	20	50	40	20	70	0,571	0,286
8	10	20	50	30	20	70	0,429	0,286
2	10	10	50	30	10	70	0,429	0,143
5	10	10	60	30	10	80	0,375	0,125
9	10	20	60	30	20	80	0,375	0,250
10	20	20	60	40	20	80	0,500	0,250
11	15	25	55	35	25	75	0,467	0,333
8	10	20	50	30	20	70	0,429	0,286
9	10	20	60	30	20	80	0,375	0,250
11	15	25	55	35	25	75	0,467	0,333
7	20	20	50	40	20	70	0,571	0,286
10	20	20	60	40	20	80	0,500	0,250
6	20	10	60	40	10	80	0,500	0,125

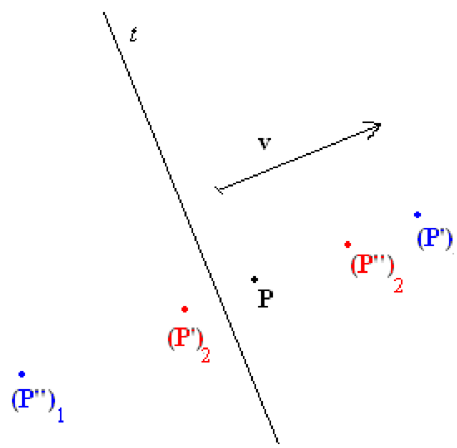


Az ábrán egyszerű ház látható egy lábtörlővel. Mintha fénykép lenne! A kész rajzon megfigyelhető, hogy a *z* tengely irányába eső párhuzamosok „összetartanak”, az *x* tengely és *y* tengely irányába eső párhuzamosok pedig nem. Hogy miért? Érdemes elgondolkodni rajta, bár túlmutat e munkalap keretein...

Tengelyes tükrözések szorzata
Biliárd-matematika

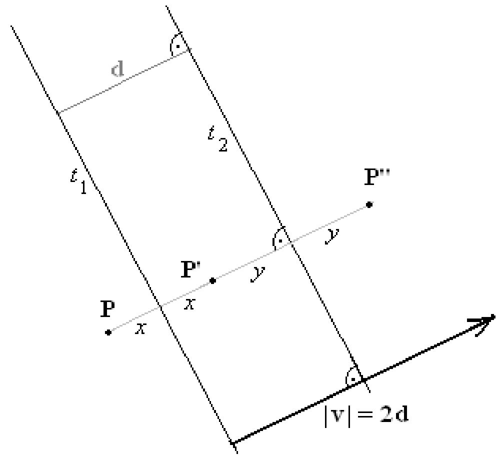


Geometriai transzformációknak azokat a függvényeket nevezzük, amelyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz, azaz pontokhoz pontokat rendelnek. Ez a munkalap csak síkbeli transzformációkkal foglalkozik.
Ha két transzformációt egymás után alkalmazunk, akkor a két transzformáció szorzatát (egymásutánját, kompozícióját) kapjuk. Úgy jelöljük, hogy a transzformációk jeleit egymás után írjuk. E definíció kettőnél több transzformáció esetén is értelmes. A kaleidoszkópban látott kép például tükrözések szorzatából keletkezik.
Transzformációk szorzata estén a pontok képét „vesszőzéssel” jelöljük: ha elvégzünk egy transzformációt, akkor egy P pont képét (azt, amit a transzformáció, mint függvény a P-hez rendel) P’-vel jelöljük. Erre egy újabb transzformációt alkalmazva a kép képét P’’-vel jelöljük, erre a kapott képre egy újabb transzformációt alkalmazva a kapott pontot P’’’-vel jelöljük stb.
Ha egy t egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözést csak t-vel jelölünk, általában nem vezet félreértésre. Ugyanígy egy **v** vektorral való eltolást jelölhetünk csak **v**-vel. Ha egy P pont egy elforgatás középpontja, és α a szöge, akkor jelölhetjük P□-val.



Megállapítható, hogy a transzformációk szorzata általában nem felcserélhető. Ha például a sík pontjaira elvégzünk egy **v** vektorral való eltolást, majd egy rá merőleges t_1 tengelyre tükrözünk, akkor két különböző transzformációt kapunk eredményül. Az ábráról leolvasható, hogy a **v**t_1 és t_1**v** transzformációk más pontot rendelnek az ábrán látható P ponthoz. Az első esetben a (P”)$_1$, a második esetben pedig a (P”)$_2$ pontot.
Bármely három g_1, g_2, g_3 transzformáció (két szorzásból álló) szorzatára érvényes a következő összefüggés: $(g_1g_2)g_3= g_1(g_2g_3)$.
Ez abból következik, hogy minden P-hez ugyanazt a P’’’-t rendeli mindkét transzformáció-szorzat.
Vizsgáljuk meg általános és középiskolából ismert távolságtartó transzformációk szorzatát!
Milyen transzformációt adhat **két tengelyes tükrözés szorzata**? Jelöljük az egyik tengelyt t_1-gyel, a másikat t_2-vel!

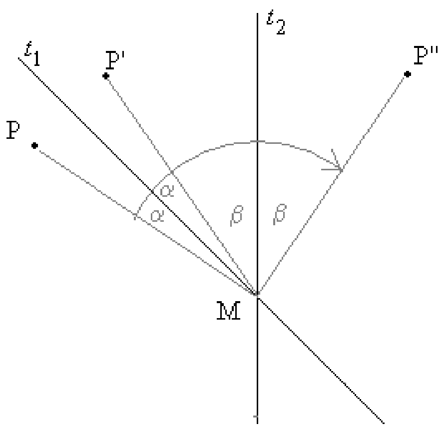
Ha a két tükrözés tengelye azonos ($t_1=t_2$), akkor a két tükrözést egymásután elvégezve minden ponthoz önmagát rendeljük hozzá. E transzformációt identitásnak vagy identikus transzformációnak nevezzük. Jelölése: $t_1t_1=id$.



Ha a két tükrözés tengelyei párhuzamosak, akkor szorzatként egy olyan eltolást kapunk, melynek vektora merőleges mindkét tengelyre, hossza kétszerese a tengelyek távolságának, s iránya a t_1-től a t_2 felé mutat. Ezt az ábra igazolja arra az esetre, amikor a P pont és a t_2 egyenes a t_1 egyenes különböző oldalán fekszik, P' pedig a két tengely között van.

Megfigyelhető, hogy a tengelyek iránya és távolsága egyértelműen meghatározza a szorzatként kapott eltolást. Bármilyen vektorral eltolhatjuk a síkban a két tengelyt, így mindig ugyanazt az eltolást adja a t_1t_2 szorzat.

Ha a két tükrözés tengelyei metszik egymást, akkor szorzatként egy olyan elforgatást kapunk, amelynek középpontja a tengelyek metszéspontja, az elforgatás szöge pedig kétszerese a tengelyek t_1-től a t_2 felé mutató szögének. Ezt az ábra igazolja arra az esetre, amikor a P, P' és P'' pontok a „lehető legegyszerűbben" helyezkednek el. (Az állítás itt az irányított szögekre felírt α+α+β+β=2(α+β) egyenlőségből, illetve a PM = P'M = P''M egyenlőségből következik.)



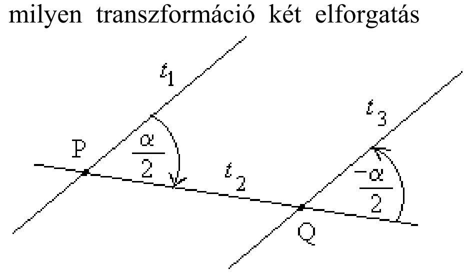
Megállapíthatjuk, hogy a tengelyek metszéspontja és szöge egyértelműen meghatározza a szorzatként kapott elforgatást. Bármilyen szöggel elforgathatjuk a síkban M körül a két tengelyt, így mindig ugyanazt az elforgatást adja a t_1t_2 szorzat.

Megfigyelhető, az is az eddigiekben, hogy két körüljárásfordító tükrözési transzformáció szorzata körüljárástartó lett.

M61: A fenti két ábra csak bizonyos esetekre ad bizonyítást. Egészítsük ki a két bizonyítást t_1, t_2 és P minden elhelyezkedése esetére!

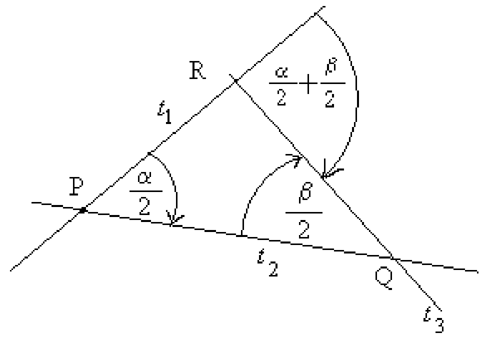
Közismert, hogy két eltolás szorzata eltolás. De milyen transzformáció két elforgatás szorzata? Több esetet vizsgálunk meg.

Lehet a két szög egymás ellentettje, így a két forgatás P^{α} és $Q^{-\alpha}$. Jelöljük ekkor t_2-vel a PQ egyenest, az ezzel $\frac{\alpha}{2}$ szöget bezáró, P-n áthaladó

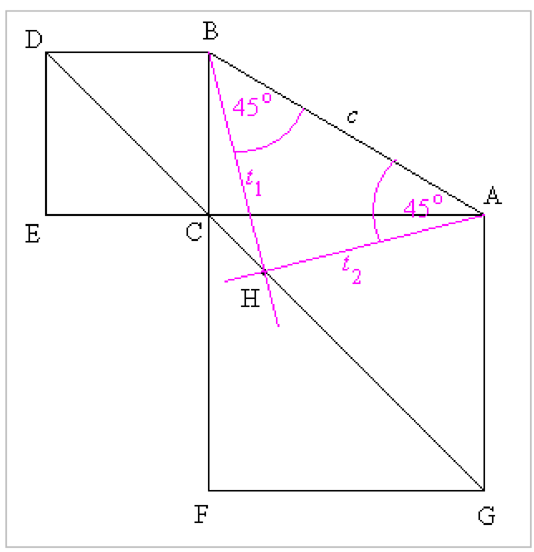


egyenes legyen t_1 és a t_2-vel $-\frac{\alpha}{2}$ szöget bezáró, Q-n áthaladó egyenes neve legyen t_3 az ábra szerint. Így $P^{\alpha} = t_1t_2$ és $Q^{-\alpha} = t_2t_3$, azaz $P^{\alpha}\ Q^{-\alpha} = (t_1t_2)(t_2t_3) = t_1(t_2\ t_2)t_3 = t_1t_3$. De így éppen két párhuzamos tengelyre való tükrözés szorzatát kaptuk, azaz eltolás lesz az eredmény.

Ha a két forgatás P^{α} és Q^{β}, és a két szög nem egymás ellentettje (valamint egyik szög ellentettje sem 360º többszörösével való elforgatottja a másik szögnek), akkor az előzőekhez hasonlóan vehetőek fel a t_1 , t_2 , t_3 tengelyek, $P^{\alpha} = t_1t_2$ és $Q^{\beta} = t_2t_3$. Emiatt pedig $P^{\alpha}\ Q^{\beta} = (t_1t_2)(t_2t_3) = t_1(t_2\ t_2)t_3 = t_1t_3 = R^{\alpha+\beta}$. Tehát két elforgatás szorzata ebben az esetben egy olyan elforgatás, amelynek szöge az eredeti elforgatások szögeinek összege.
Az állítás triviálisan igaz a P=Q esetre is.



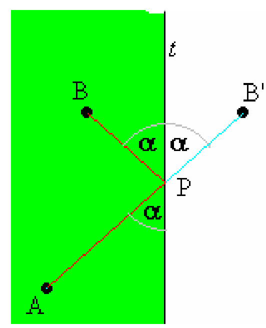
M62a: Igazoljuk hasonló módon, hogy egy v eltolás és egy P^{α} elforgatás szorzata egy α szögű elforgatás, ha a ≠ k·360º (k∈Z)!
M62b: Igazoljuk, hogy négy tengelyes tükrözés szorzata mindig helyettesíthető két megfelelő tengelyes tükrözés szorzatával!
Az M62b állításból következik, hogy akármennyi tengelyes tükrözés szorzata felírható legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként.
Hogyan használhatjuk a fentebbi megállapításokat feladatok megoldására? Nézzünk egy példát erre:
Feladat: Egy ABC derékszögű háromszög AC és BC befogói fölé megrajzoljuk a CBDE és ACFG négyzeteket. Legyen H a DG szakasz felezőpontja. Igazoljuk, hogy ABHC húrnégyszög!



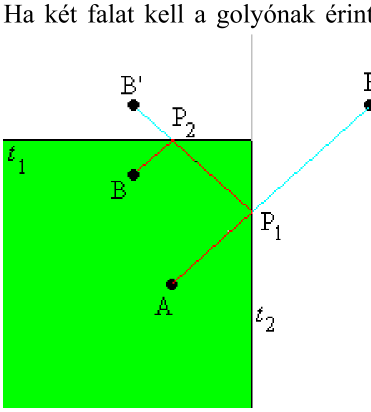
Megoldás: Az ábra szerint vegyük fel az AB szakasszal A-nál és B-nél 45º-ot bezáró t_1 és t_2 egyeneseket! Végezzük el a $B^{90^\circ}A^{90^\circ}$ transzformációt, amely két elforgatás szorzata. Ez a transzformáció a D pontot (a C ponton „keresztül") G-be viszi. Ugyanakkor az ábra jelöléseivel felírva ez azonos a $(t_1c)(ct_2) = t_1(cc)t_2 = t_1t_2$ transzformációval, ami a fentebbiek alapján egy 90º+90º=180º-os elforgatással egyenlő. Az elforgatás középpontja a már bizonyítottak alapján a t_1 és t_2 tengelyek metszéspontja. Másrészt ez a pont, a D-t G-be vivő 180º-os elforgatás középpontja csak H lehet. Tehát BAH háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög. A háromszög derékszögű H csúcsa rajta

van az AB átfogó Thalész-körén. Ugyanezen a körön rajta van a Thalész-tétel miatt az ABC háromszög derékszögű C csúcsa is. Így ez a kör tartalmazza az A; B; C; és H pontokat, melyek emiatt egy húrnégyszög csúcsai.
A következő feladatokat próbáljuk transzformációk szorzatának felhasználásával megoldani! (Más jellegű megoldás is lehetséges persze, de szokjuk csak meg a „transzformációs” gondolkozást!)

M63: Rajzoljunk ABC hegyesszögű háromszög AC és BC oldalaira kifelé egy ACD és egy BEC szabályos háromszöget! Rajzoljunk az AB oldalra a háromszög belsejébe egy olyan egyenlő szárú ABF háromszöget, amelynek AB az alapja és alapon fekvő szögei 30º-osak! Igazold, hogy DEF háromszög egyenlő szárú! Mekkorák a szögei?
M64: Rajzoljunk ABC hegyesszögű háromszög AC és BC oldalaira kifelé egy ACD és egy BEC egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amelynek átfogói AC és BC! Legyen F az AB oldal felezőpontja! Határozd meg DEF háromszög oldalainak arányát!
M65: Az A, B, C, D, E, F pontok úgy helyezkednek el a síkon, hogy ABC, ADE és CDF pozitív körüljárású szabályos háromszögek. Igazold, hogy AEFB paralelogramma!
M66: Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalán fekszik P pont, BC oldalán Q pont, AC oldalán pedig az R és S pont úgy, hogy AP=AS, BP=BQ és CQ=CR. Igazold, hogy PQRS húrnégyszög!



A mindennapi életben is találunk példát tengelyes tükrözések szorzatára. Bizonyára sokan találkoztak már ezzel a problémával: Milyen irányban kell meglökni egy biliárdgolyót, hogy a falról visszapattanva (tökéletesen rugalmas ütközést feltételezve) eltalálja a másik golyót? Az ábrán az A jelű golyóval kell a B jelűt eltalálni. A falra, mint tengelyre tükrözzük a B golyót és az AB' szakasz adja a lökés irányát. A megoldás helyes, mert a jelzett α szögek a tükrözés miatt egyenlők lesznek.
Ha két falat kell a golyónak érinteni, akkor ugyanez a helyzet, csak a B'-t tovább kell tükrözni a másik falra. Így a B" és A pontok összekötő szakasza adja a helyes megoldást. Az ábra tanulmányozása és a fentebb elmondottak alapján már megoldható a következő néhány feladat:



M67: Egy téglalap alakú, 90 széles és 180 cm hosszú biliárdasztalon van egy golyó. A golyó két szomszédos saroktól 50 cm-re, illetve $20\sqrt{13}$ cm-re van. Milyen irányban kell a golyót meglökni, hogy mind a négy falról egyszer visszapattanva visszatérjen eredeti helyére?
M68: Egy konvex négyszög alakú biliárdasztalon van egy golyó. A feladatunk, hogy megadjuk, milyen irányban kell a golyót meglökni, hogy mind a négy falról egyszer visszapattanva visszatérjen eredeti helyére. A tükrözések szorzatáról elmondottak alapján adjunk minél egyszerűbb megoldást a kellő irány megszerkesztésére, s illusztráljuk egy (lehetőleg nem speciális) példával a megoldás menetét!

M69: Egy biliárdasztal csúcsai a koordináta-rendszerben a következő pontok: A(0;0), B(0;6) , C(12;6) és D(6;0). Egy biliárdgolyó a P(4;2) koordinátájú helyen áll. A golyót meglökve, az AD, AB, BC, CD falról ilyen sorrendben visszapattanva visszatér a golyó az eredeti helyére. Számítsuk ki a golyó útját leíró négy egyenes egyenletét!
M70: Egy ABCD biliárdasztal húrnégyszög alakú. Igazoljuk, hogy ha két golyóra teljesül, hogy azokat meglökve, az AD, AB, BC, CD falról ilyen sorrendben visszapattanva visszatérnek az eredeti helyükre, akkor a golyókat egymással párhuzamosan löktük meg!

A valódi biliárdban persze nem teljesen rugalmasak a falak, s nem teljesen egyenesen gurul a golyó. A játékosoknak nincs lehetőségük méréseket, geometriai számításokat, szerkesztéseket elvégezni, s ha el is végeznék, nem tudnák precízen kivitelezni a még oly pontosan kiszámított lökést sem.
De hisz épp ez adja a játék izgalmát!

Börtön-kombinatorika

E munkalap témája a kombinatorika, ez speciális véges halmazok elemszámának meghatározásával foglalkozó tudományág. Hogy mindent pontosan értsünk, kezdjünk egy kis elméleti áttekintéssel!

Elméleti áttekintés

Ha egy *n* elemű halmaz elemeit sorba rendezzük, akkor e sorbarendezéseket az n elem permutációinak nevezzük (szakkifejezéssel: ezek rendezett n-esek). Mivel a sorban első elemet n-féleképpen választhatjuk, s az n-féle kezdést n-1-féle második elemmel folytathatjuk, s az így kapott n·(n-1)-féle „kételemes" kezdést n-2-féleképpen folytathatjuk stb., ezért az összes lehetőségek száma: n·(n-1)·(n-2)·....·3·2·1. Ezt a számot az n! jelöléssel rövidítjük (kiejtés: *n faktoriális*). Pl.: 5!=5·4·3·2·1=120.

Egy *n* elemű halmaz *k* elemű részhalmazait (n>=k) az n elem k-adosztályú kombinációinak nevezzük. Itt, mivel halmazról van szó, nem számít az elemek sorrendje! Számoljuk össze az eseteket úgy, hogy a sorrend lényeges legyen, azaz képezzünk rendezett k-asokat az összes lehetséges módon az n elemből. Ekkor a sorban első elemet n-féleképpen választhatjuk, s az n-féle kezdést n-1-féle második elemmel folytathatjuk, s az így kapott n·(n-1)-féle „kételemes" kezdést n-2-féleképpen folytathatjuk stb., ezért az összes lehetőségek száma: n·(n-1)·(n-2)·....·q, ahol a q értékét úgy kell választani, hogy összesen k darab szám legyen szorozva. (Ekkor q=n-k+1, kiszámolható.) Minden egyes k-elemű részhalmazt most k!-szorosan számoltunk, hisz elemeinek minden lehetséges sorrendje szerepel a kapott rendezett k-asok között. Emiatt el kell osztani a lehetséges rendezett k-asok számát k!-sal, hogy megkapjuk, hányféle lehetőség van, ha a sorrend nem számít:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}{k!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{k!\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Erre az értékre van egy rövid jelölés is:

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

(kiejtés: *„n" alatt a „k"*.) Példa:

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\cdot5!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(3\cdot2\cdot1)\cdot(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)}=56$$

A kombinációk számát leíró számokat binomiális együtthatóknak nevezzük. Számos tulajdonságuk ismert. Néhányat most kombinatorikai módszerekkel fogunk belátni.

$$(0.)\qquad \binom{n}{0}=1\quad,\textit{valamint}\quad \binom{n}{1}=n$$

Az első állítás azért igaz, mert 0 elemű részhalmaza minden halmaznak csak egy van, az üres halmaz. A második állítás azért igaz, mert minden halmaznak annyi egyelemű részhalmaza van, ahány eleme van.

$$(1.)\qquad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

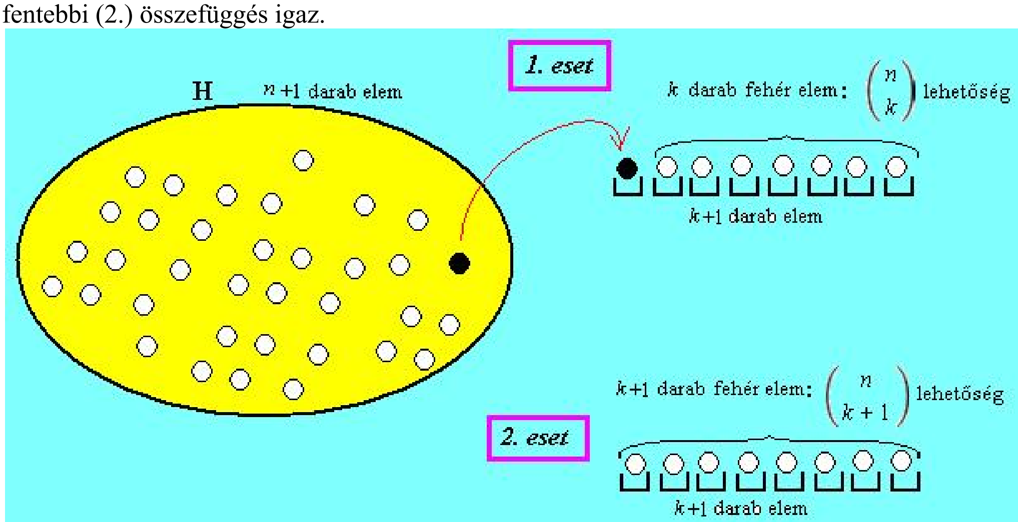
Ez igaz, mivel az *n* elemű halmaz minden *k* elemű részhalmazát párba állíthatjuk saját (*n-k* elemű) komplementerével, így annyi *k* elemű részhalmaz van, mint ahány *n-k* elemű.

$$(2.)\qquad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

Ennek igazolásához tekintsünk egy olyan n+1 elemű halmazt, melynek n darab eleme „fehér", egy eleme pedig „fekete". Válasszunk ki az összes lehetséges k+1 elemű részhalmazt! Az ilyen részhalmazok száma a fentiek alapján $\binom{n+1}{k+1}$.

Ugyanezeket a részhalmazokat összeszámolhatjuk úgy is, hogy külön számoljuk a fekete elemet tartalmazó részhalmazokat, illetve azokat, amelyek csupa fehér elemeket tartalmaznak. Az első esetben n darab fehér közül kell k darabot választani a fekete mellé, a második esetben az n darab fehér közül kell az összes k+1 darab elemet kiválasztani. Ha így számoljuk össze a k+1 elemű részhalmazokat, akkor ennyi t kapunk: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$

Mivel mindkétszer ugyanarra a feladatra adtunk eredményt, a két darabszám egyenlő, s a fentebbi (2.) összefüggés igaz.



$$(3.)\qquad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

A bal oldalon egy n elemű halmaz 0, 1, 2 ... n elemű részhalmazainak számát adtuk össze, tehát itt egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma áll. Az n elemű halmaz minden részhalmazát elkészíthetjük úgy, hogy az n elem mindegyikéről eldöntjük, 'bevesszük-e", vagy kihagyjuk a készülő részhalmazból. Így minden elemnél kétféle döntést hozhatunk, tehát a lehetséges döntés-sorozatok száma 2^n. Épp ez a szám áll a jobb oldalon.

Alapfeladatok táblázata: http://slc.pszk.nyme.hu/file.php/5/munkalap8/kombinat.doc

Igazoljuk a következő azonosságokat hasonló modellekkel, „kombinatorikus" úton (n és k pozitív egészeket jelentenek)!

$$M71: \quad \binom{n}{10}+\binom{n-1}{10}+\ldots+\binom{10}{10}=\binom{n+1}{11} \quad ,ha \quad n>10$$

$$M72: \quad \binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

$$M73: \quad \binom{n}{0}\binom{2n}{n}+\binom{n}{1}\binom{2n}{n+1}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{2n}{n}=\binom{3n}{n}$$

A következő feladatok egy képzeletbeli állam képzeletbeli börtönéről, azon belül is a „kasszafúró cella" tíz lakójáról szólnak. Különféle okokból az elítéltek életében fontos szerepet játszik a kombinatorika.
Persze a történetnek csak a matematikai részét vegyük komolyan! 🙂
A börtön egyik lakója (kérte, hogy nevét ne írjuk le, ezért itt A-nak nevezzük) azért került ide, mert feltört egy széfet, és elrabolta belőle a drágaköveket. Az ítélethirdetésnél a bíró kijelentette, hogy A. a széfet becsületesen is kinyithatta volna, ha a zár minden kombinációját kipróbálja. Azt a büntetést szabta ki, hogy annyi órát töltsön a börtönben az elítélt, ahányféle lehetőség lett volna a széf zárján. Az elítélt ügyvédje fellebbezett a túlzott büntetés miatt, mivel a széf kódja kilencjegyű volt, s mindegyik jegye egy számjegy lehetett (0-tól 9-ig). Azt kérte, hogy enyhítsék a büntetést csak olyan kódszámok darabszámára, melyben a számjegyek szigorúan monoton növekednek. A fellebbezést nem fogadta el a bíróság, de enyhítette a büntetést a monoton növekvő kódok számának megfelelő órára.

M74a: Hány év lett volna a büntetés eredetileg?
M74b: Mennyi ideig tartott volna az ügyvéd által javasolt büntetés?
M74c: Mennyi ideig tart a végső büntetés?

Két másik rab, B. és C. szintén egy drágaköveket tartalmazó széf feltörése miatt került a börtönbe, ketten törtek fel egy olyan páncélszekrényt, amelynek kódja tízjegyű volt, s mindegyik jegye egy számjegy lehetett (0-tól 9-ig). Mindketten szereztek egy információt a kódról, de két információjukat nem tudták felhasználni, ezért végül felrobbantották a széfet.
A kódról B. azt az információt szerezte, hogy a kódszám jegyeinek összege 45, míg C. azt tudta meg, hogy a kód a jegyeit váltakozó előjellel összegezve (+; -; +; -; ...) nullát ad.

A bíróság mindkettejükre azt a büntetést mérte, hogy egyikük is, másikuk is annyi napot töltsön a börtönben, amennyi kód megfelelne az információjuknak.

M75a: Hány kód felel meg egyszerre mindkét információnak?
M75b: Kettejük közül B. vagy C. büntetése súlyosabb?

A negyedik rab, D. is egy ugyanilyen típusú (10 számjegy 0-9-ig) széfet tört fel. Neki az az információja volt a kódról, hogy a benne szereplő számjegyek összege 85. Ezen a széfen egy kód beállítása és a kinyitás próbálása 20 másodpercet vett igénybe, ezért úgy gondolta, hogy egy éjszaka alatt az összes kódot végig tudja próbálni. Pechje volt, reggel ott találták még a páncélszekrény mellett, amint karikás szemekkel próbálgatta a lehetőségeket.

M76: Mennyi időbe telt volna D-nek az összes kód kipróbálása?

Ilyen típusú széfet akart feltörni az ötödik és hatodik rab, E. és F. is. Közülük E. azt az információt szerezte, hogy a kódban nem szerepel 0 számjegy, a F pedig, hogy legfeljebb háromféle számjegy van benne. Persze hiába volt a két információ, még mindig rengeteg lehetőség maradt a kódra, így tehát nem tanakodtak rajta, hanem egy ütvefúróval feltörték a széfet, elvitték a tartalmát, és elmenekültek. Egy hét múlva épp egy szép vörös rubinon próbáltak túladni, amikor a rendőrök lefogták őket. Ugyanaz a bíró ítélte el őket, aki A-t, B-t, és C-t is, így nem csodálkozhatunk, hogy az ítélet szerint annyi percet kell letölteniük a börtönben, ahányféle lehetőségük lett volna a kódszámra a két információ birtokában.

M77: Hány napot, hány órát és percet kell tehát az „intézményben” tölteniük?

Az a négy cellatárs, G. H. I. és J., akikről még nem esett szó, szintén kasszafúró. Ötödik társuk, K. adta fel őket a rendőrségen, azért kerültek ide. A kasszával minden a terv szerint ment nekik, de az osztozkodásnál alig tudtak megegyezni. Apró ékköveket találtak a kasszában, ezek sorszámozva voltak 1-től kezdve sorban az utolsóig. Végül az osztozásra ezt találták ki: először G. elveszi azokat az ékköveket, amelyeknek sorszáma öttel osztható, utána H. elveszi a maradék kövek közül azokat, amelyek sorszáma néggyel osztható, aztán I. elveszi a maradékból a 3-mal osztható sorszámúakat, végül a maradékból J. elveszi a páros sorszámúakat. Az ezután megmaradt kövek K. tulajdonát képezik. Tudjuk, hogy a főnök kapta a legtöbb ékkövet, második legtöbbet a sofőr, utánuk következett a két kasszafúró azonos díjazással, végül a legkevesebbet az utcai figyelő kapta. Tudjuk, hogy K. 44 darab ékkövet kapott, s tudjuk továbbá, hogy a kövek száma 200-nál kevesebb volt.

M78a: Pontosan hány ékkő volt a zsákmány?
M78b: Kinek milyen feladata volt a bandában?

A rabok életében fontos szerepet játszik a cella takarítása, minden napon más takarít. Sorsolással tervezik meg mindig egy tíznapos időszakra a takarítást, úgy, hogy egy emberre ne kerüljön sor túl sűrűn: ügyelnek rá, hogy aki többször is takarít a tíz napban, a két takarítása között legalább három pihenőnapja legyen. Persze aki szerencsés – „mákos”, az a tíz napban egyszer sem takarít.

M79: Hányféleképpen lehet a feltételnek megfelelően úgy sorsolni a tíznapi takarítási rendet, hogy J. ne legyen „mákos”?

Egy alkalommal nagy lehetőség kínálkozott a tíz rab számára: uralkodói rendelet jött, hogy mind a tízen kiszabadulhatnak, ha teljesítenek egy próbát. A próba ez: a rabok sorszámait (az 1-10-ig terjedő számokat) felírják egy-egy papírra, s a tíz papírlapot valamilyen sorrendben lerakják a börtönigazgató szobájának asztalára. A rájuk írt számok nem látszanak, mert a lapok hátlappal felfelé fekszenek. Sorban engedik be a rabokat, a szoba egyik ajtaján, mindenki felfordíthat öt lapot, megnézheti, majd pontosan ugyanúgy vissza kell raknia a kártyákat (őrök ügyelnek a szabályok betartására). Ezután a rabnak távoznia kell a másik ajtón, s ha kiment, akkor jöhet be az első ajtón a következő rabtársa (aki ugyanezt teszi a lapokkal). Mikor mind a tízen jártak a szobában, az őrök jelentik, hogy hány rab látta a saját számát. Ha mind a tíz elítélt látta a saját sorszámát, akkor mind a tízen szabadok, ha akár egy is van köztük, aki a saját számát nem látta, akkor mindnyájan rabok maradnak.

A próba előtti estén beszélgetnek a rabok:

A: Fiúk, igen kicsi az esélyünk. Mindenkinek 50%-nyi esélye van, hogy saját számát megtalálja a tíz lap között. Ez annyi, mintha mindenki egy pénzdarabbal dobna, és mindenkinek fejet kellene dobnia. Ezt a próbát szinte lehetetlen kiállni, mert ha a pénzdarabok nyelvén mondom el, akkor az összes lehetséges eset $2^{10}=1024$, s ebből egyetlen eset jó nekünk – ha mindenki fejet dob.

B: Akkor az összes eset 1/1024 részében szabadulunk ki... Az esélyünk egy ezreléknél is kevesebb... (Sóhajok, összenézés, néma csend...)

C: Fel a fejjel! Nézzétek, a matematikus nagybátyám, Béla küldött egy kis kalácsot!

D: Van benne mazsola? A csücske az enyém!

E: Az én részemben valami papírszelet van!

C: Add ide ... nicsak, ezt Béla nagybátyám írta! Figyeljetek, felolvasom: *„Hallottam a próbáról, s kigondoltam, hogy hogyan növelhetitek a megmenekülésetek esélyét. Mindegyikőtök először balról számítva az annyiadik papírt húzza fel, amennyi a saját börtönbeli száma. Ezután azt a papírt húzza fel, ahányas számot a felhúzott papír mutat. Ezután újra a megnézett papírlap által mutatott számnak megfelelő lapot húzza fel, és így tovább, amíg öt papírt meg nem nézett. Ha meg akartok menekülni, mindenki így cselekedjen!”*

A: Vesztenivalónk nincs, kövessük ezt holnap!

B: Én megbízok a bácsikádban.

D: Én is, mert igen finom kalácsot küldött…

Vizsgáljuk meg ennek a taktikának a tényleges esélyét! Ehhez meg kell ismerkednünk néhány új matematikai fogalommal.

A tíz elem permutációit felfoghatjuk úgy is, mint egy tízelemű halmazon értelmezett függvényt, melynek értékkészlete ugyanaz a tízelemű halmaz. Jelöléssel úgy írhatjuk le, mintha egy függvény értéktáblázatát írnánk le, csak zárójelbe téve írjuk két sorba a hozzárendeléseket, az első sor valamely eleméhez a második sorban alatta levő elemet rendeli a permutáció. Például:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 5 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Ha két permutációt (mint függvényt) egymás után alkalmazunk, egy újabb permutációt kapunk. Ezt a permutációk szorzatának nevezzük. Pl.: tekintsük az alábbi permutációt:

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 6 & 8 & 2 & 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

A két permutáció szorzata úgy kapható meg, hogy ha egy k számhoz az első permutáció n-et rendel, és n-hez a második permutáció m-et rendel, akkor a permutációk szorzata k-hoz m-et rendeli:

$$p_1 p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 5 & 9 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 8 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 8 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Ha fordítva járunk el, látható, hogy más eredményt kapunk, tehát a permutációk szorzása nem felcserélhető.

Ha egy permutáció hozzárendeléseit „megfordítjuk”, a permutáció **inverzét** kapjuk. (Persze célszerű az első (felső) elemek szerint növekvő rendbe rendezni a hozzárendeléseket.) Íme a p_1 inverze (jelöléssel p_1^{-1}):

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 5 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$p_1^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 5 & 9 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 6 & 1 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

A permutációt saját inverzével bármelyik oldalról megszorozva az identikus permutációt kapjuk, mely minden elemhez önmagát rendeli. Minden permutációnak egyértelműen meghatározható az inverze a fentebbi módszerrel.

Egy permutáció négyzetének nevezik azt a permutációt, amelyet úgy kapunk, hogy egy permutációt önmagával szorzunk meg. Ha ezt újra és újra megszorozzuk az adott permutációval, akkor annak további hatványait kapjuk. Pl.: itt a p_1 permutáció első néhány hatványa:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 5 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad p_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 8 & 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$p_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad p_1^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 8 & 1 & 4 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$p_1^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 6 & 1 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad p_1^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Figyeljük meg, hogy ahogy sorban hatványozzuk p_1-et, minden egyes elemhez előbb-utóbb önmagát rendeli p_1-nek valamelyik hatványa. Könnyen látható, hogy ez bármely permutáció esetén így van.

Ha tehát egy elemre alkalmazunk egy rögzített permutációt, aztán ezt az elem képére alkalmazzuk, aztán újra és újra alkalmazzuk, míg az eredeti elemhez nem jutunk, akkor az eredeti elem a közben kapott elemekkel együtt egy úgynevezett **ciklust** alkot. Minden elem csak egy cikluson belül lehet. Az egy cikluson belüli elemek bármelyike megkapható bármelyik másikból a permutáció ismételgetésével, de különböző ciklusokon belüli elemek nem kaphatók meg így egymásból. A ciklusok megfigyeléséhez célszerű a permutáció hatványait egymás alá írni, amíg minden elem alatt meg nem jelenik önmaga. Ennek alapján minden permutációt rövidebb (és a szerkezetét jobban mutató) írásmóddal jelölhetünk, úgy, hogy a ciklusait az elemek megfelelő rendjében zárójelek közt felsoroljuk:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 5 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 8 & 7 & 4 & 9 \\ 8 & 6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 9 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 8 & 1 & 4 & 7 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 6 & 1 & 9 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \qquad p_1 = (1\,6\,5\,8\,2\,4)(3)(7\,9)$$

Tehát a p_1 permutáció egy hatelemű, egy egyelemű és egy kételemű ciklusból áll. Ha az 1-től n-ig terjedő számok halmazát valahány részhalmazra bontjuk, s az egyes részhalmazokban levő elemekből őket valamilyen sorrendbe rakva ciklusokat képezünk, akkor ezzel mindig egyértelműen megadunk egy permutációt. Az is igaz, hogy egy permutációt hatványozva előbb-utóbb az identikus permutációt kapjuk. Az iménti p_1 permutációnak először a hatodik hatványa volt ez.

M80a: Adjunk meg olyan 13 elemű permutációt, amelyet sorra hatványozva először a 21. hatványa adja az identikus permutációt!

Most már eleget tudunk a permutációkról, térjünk vissza a rabok feladatához!

Ha egy sorban összekeverik az asztalon a rabok sorszámait, akkor ezzel egy permutációját adják meg az 1..10 halmaznak. A Béla bácsi által javasolt módszerrel minden rab a saját rabszámát tartalmazó ciklus elemein ugrál végig. Ha ez a ciklus legfeljebb 5 elemből áll,

akkor biztosan megtalálja saját számát. Ha a saját rabszámát tartalmazó ciklus hatelemű vagy annál hosszabb, akkor nem találja meg a számát. Tehát Béla bácsi módszerével akkor találja meg a rabszámát *minden rab*, ha az asztalon összekevert rabszámok permutációjának minden ciklusa legfeljebb öt elem hosszúságú.
A megmenekülés esélyét az adja, ha megmondjuk, az összes permutáció hányadrésze olyan permutáció, amelyben minden ciklus legfeljebb 5 elem hosszú.
Először kiszámoljuk az összes lehetséges permutációk számát, ez 10!=3628800.
A rabok számára kedvező esetek számát úgy számoljuk ki, hogy kiszámoljuk a rossz esetek számát, és kivonjuk az összes esetek számából.
Rossz eset, ha 6, 7, 8, 9 vagy 10 hosszúságú ciklus van a permutációban. Ha megmondjuk, hogy mely elemekből áll egy k elemű ciklus, akkor a k darab elem bármelyikét választhatjuk a ciklus első elemének, s a többi elem tetszőleges sorrendje megad egy megfelelő ciklust. Így (k-1)! a ciklusok száma. Ennek felhasználásával:
Ha van 6 elemű ciklus, akkor annak elemeit $\binom{10}{6}$-féleképpen választhatjuk ki, a fentiek alapján 5!-féleképpen lehet a kiválasztott elemekből ciklust „készíteni”, s a maradék 4 darab elemet 4!-féleképpen lehet még elhelyezni a permutációban (azaz a börtönigazgató asztalán).
Így a lehetőségek száma:

$$\binom{10}{6} \cdot 5! \cdot 4! = 604800$$

Ha 7 elemű ciklus van, akkor a lehetséges permutációk száma hasonló okoskodással:

$$\binom{10}{7} \cdot 6! \cdot 3! = 518400$$

Ha 8 elemű ciklus van, akkor a lehetséges permutációk száma hasonlóképpen:

$$\binom{10}{8} \cdot 7! \cdot 2! = 453600$$

9 elemű ciklus esetén a lehetséges permutációk száma hasonlóképpen:

$$\binom{10}{9} \cdot 8! \cdot 1! = 403200$$

Végül a 10 elemű ciklusok száma: 9!=362880.
Összesen ez 2342880 „rossz” eset. A jó esetek száma 3628800-2342880=1285920.
A megmenekülés esélye az, hogy hány jó eset van az összes esethez képest, azaz

$$\frac{1285920}{3628800} = 0,3544$$

Így 35,44% a megmenekülés esélye, **több mint 362-szerese** az elítéltek által először vizsgált esélynek!

M80b: Számítsuk ki az esélyt 20 rab esetére, hasonló feltételek mellett (itt 10 lapot nézhet meg minden elítélt)!

A történet úgy végződik, hogy a rabok pontosan a megadott taktikát követték, s bizonyára még szerencséjük is volt, mivel teljesítették a próbát. Még aznap szabadon engedték őket – az uralkodó tartotta a szavát.
Béla nagybácsinak egyik reggel csomagot hozott a postás. Egy kalács volt benne. Felesége azonnal felvágta, s egy kistányéron az asztalra tette, hogy ezt egyék a reggeli kávé mellé.

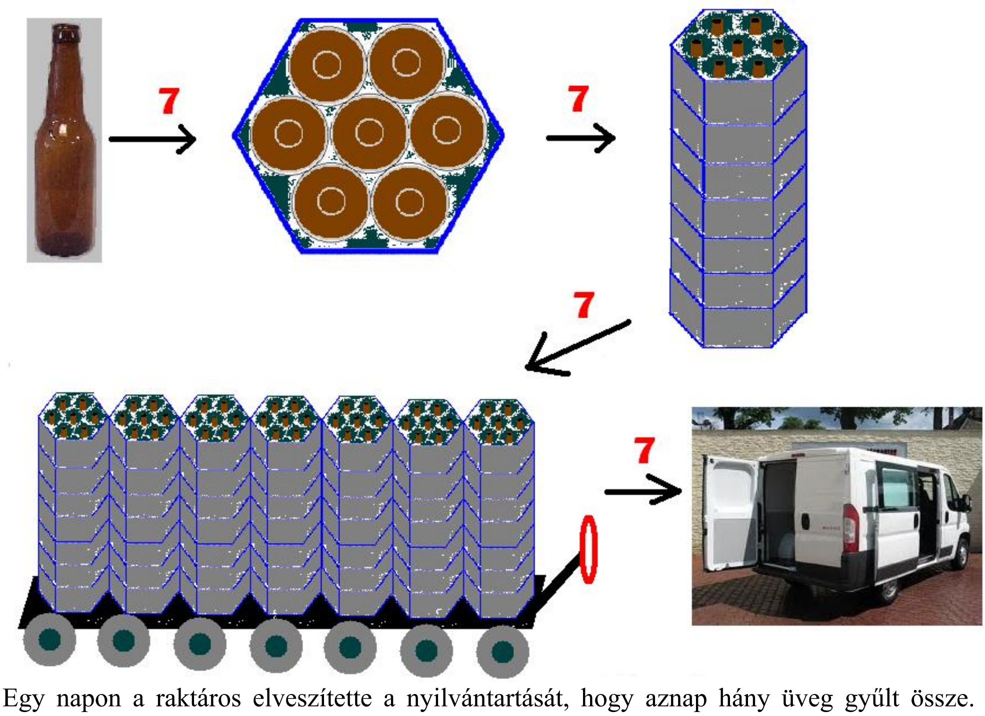
– Van benne mazsola is, Bélám! – jegyezte meg, mikor beleharapott. – Tyű, hát ez itt egy hatalmas mazsola! – méltatlankodott Béla nagybácsi a szájába nyúlva. – De nézd, nem is mazsola, hanem valami átlátszó, csiszolt kő...

A munkalap elkészítésében segítséget kaptam a következő matematikai jellegű rovat „lakóitól”:
Logikai feladványok rovata: http://forum.index.hu/Article/showArticle?t=9000780

Számrendszerek

(sörösüveg-számlálás és bűvészkedés)

Ez a munkalap a számrendszerekkel foglalkozik. Egy szemléletes modell segítségével elmagyarázza a hetes számrendszert, s ezen keresztül más alapú számrendszerek felépítését.
Néhány érdekességen és sok feladaton keresztül elvezet ismeretlen alapú számrendszerekhez is...
Egy nagy élelmiszer-áruház raktárvezetőjének sok gondja van a visszaváltott sörösüvegek pontos nyilvántartásával. Olyan sörösrekeszeik vannak, amelyekben **hét** sörösüveg fér el. Minden **hét** rekeszt egy oszlopba raknak fel, s **hét** ilyen oszlopot tudnak egyszerre egy targoncával elvinni. Egy furgon szállítja el az üvegeket a raktárból, éppen **hét** targonca tartalma fér el benne. Szabály, hogy ha hét üveg összegyűlik, azt mindig rekeszbe kell helyezni, ha hét rekesz teli van, akkor azt oszlopba kell rakni, ha hét oszlop összegyűlt, azt targoncára kell tenni, s minden hét targoncányi üveget azonnal el kell szállítani a furgonnal.



Egy napon a raktáros elveszítette a nyilvántartását, hogy aznap hány üveg gyűlt össze. Szerencsére emlékezett, hogy aznap két furgonnal vittek el üveget, s látta, hogy még öt teli targonca áll a raktárban. Mellette egy kész oszlop, amellett pedig négy teli rekesz és öt sörösüveg állt. Segítsünk neki megszámolni, hogy mennyi üveg ez összesen!
Egy rekesz 7 üveget jelent, míg egy oszlop $7·7= 7^2= 49$ üveget, egy targonca $7·7·7= 7^3= 343$ üveget, egy furgon pedig $7·7·7·7= 7^4= 2401$ üveget tartalmaz. Tehát a raktáros gondját egyszerű számítással megoldhatjuk:
2 furgon + 5 targonca + 1 oszlop + 4 rekesz + 5 üveg $=2·7^4+5·7^3+1·7^2+5= 6599$ üveg.
Jelöljük a sörösüvegek számát matematikai felírással: $25145_{(7)}$. E jelölést így olvashatjuk ki: „kettő-öt-egy-négy-öt a hetes számrendszerben”. Itt az alsó indexbeli kis zárójeles hetes

szám azt jelenti, hogy 7 a váltószám az előző és következő „tárolóeszközök” között. (Jelölni kell a nullát is, nehogy a különböző tárolóobjektumok keveredjenek, pl.: $20105_{(7)}$.) Egy „fordított” feladatot is könnyen megoldhatunk: Ha például tudjuk, hogy 4231 darab sörösüveg volt, akkor ez hány furgont, targoncát, oszlopot, rekeszt és kimaradó üveget jelent?

Számolhatunk így: 2401 üveg egy furgon, tehát **egy** furgon még kitelik az üvegekből, kettő már nem. Ha az egy furgonnyi 2401 darab üveget levonjuk a 4231-ból, akkor 1830 darab üveg marad. Hány targoncányi ez, azaz hányszor 343 üveg? 18309-ban a 343 megvan **ötször**, és marad 115 üveg, ami nincs targoncán. Hány oszlop képezhető a 115 maradék üvegből? 115-ben a 49 megvan **kétszer**, s marad 17 üveg. E 17 üveg **két** darab hetes rekeszt és **három** kimaradó üveget jelent. Az okoskodásban a vastag betűkkel kiemelt részeredmények ezt adják: $4231=15223_{(7)}$.

Okoskodhattunk volna egyszerűbben is! Ha 4231-et héttel elosztjuk, megkaphatjuk, hogy hány rekesz keletkezik: 4231-ben a 7 megvan 604-szer, és a maradék **3** (üveg). Ha a kapott 604 rekesz számát héttel osztjuk, akkor hányadosként 86-ot kapunk **2** maradékkal, azaz az oszlopok száma 86 (és 2 rekesz marad ki). A 86-ot, azaz az oszlopok számát osztjuk 7-tel, így kapjuk, hogy 12 targonca keletkezik, és **2** oszlop marad ki. Végül a 12 targoncányi rakomány **1** furgont tölt meg, és kimarad **5** targoncányi.

Így is megkaptuk tehát a $15223_{(7)}$ felírást.

1	alap:	
2	7	
3	a szám:	értéke:
4	1	1
5	5	12
6	2	86
7	2	604
8	3	4231
9		
10		
11		
12		
13		
14		

Ezek szerint a 7-es számrendszerbe könnyű átszámolni, ha az eredeti számot 7-tel osztjuk, aztán a hányadosokkal újra meg újra ugyanezt tesszük, és a maradékokat fordított sorrendben feljegyezzük.

Természetes, hogy a furgonon túl is folytatható a számolás, ha mindenképp modellt akarunk hozzá készíteni, akkor mondhatjuk például, hogy 7 furgon egy vasúti vagon, 7 vagonból áll egy vonat, 7 vonatból lesz egy hajórakomány stb.

Más számrendszerekkel ugyanez a helyzet, ha például ötös számrendszerben akarunk számolni, akkor **öt** sörösüveg van egy rekeszben, **öt** rekeszből áll egy oszlop, **öt** oszlop egy targonca stb. Akkor vagyunk gondban, ha a számrendszer alapja 10-nél nagyobb. Mit írjunk például a 13-as számrendszerben, ha 10 rekesz keletkezett, és 13 sörösüveg maradt ki? Nyilván nem jó jelölés a $1012_{(13)}$, mert a négy jegy azt jelzi, hogy targoncát is kell használni, pedig erről szó sincs. A megoldás, hogy új számjegyeket kell kitalálni. Jelölhetné például a 10-est § jel, a 11-est # jel és a 12-est † jel. Ekkor a számunk §† $_{(13)}$ lenne. De ehelyett sokkal egyszerűbb és kevésbé félreérthető, ha az angol ABC betűivel jelöljük az „új” számjegyeket, azaz a 10-et **A**-val, a 11-et **B**-vel és a 12-t **D**-vel. A számunk jelölése tehát $AC_{(13)}$. Így minden *n* alapú számrendszer esetén elmondható, hogy *n* jegy szerepelhet a benne felírt számokban, amelyek a 0, 1, ..., *n*–1 számokat jelentik.

M81: Készítsünk olyan Excel-táblát, amely tetszőleges 2 és 10 közötti egész alap esetén kiszámolja egy benne felírt szám 10-es számrendszerbeli értékét! Legfeljebb 10 jegyre készüljön fel, de egyetlen képlet másolásával bővíthető legyen! Az eredményt az „érték” oszlop legalsó száma adja. Használható az üres() függvény és az "" üres cellaérték is. Segít a fentebbi ábra!

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a szám:	alap: 7							
2	232457	33208	4744	677	96	13	1	0	0
3		1	0	5	5	5	6	1	0
4		0	1	2	3	4	5	6	7
5		1	1	501	5501	55501	655501	1655501	1655501
6	Eredmény:	1655501							
7									

M82: Készítsünk olyan Excel-táblát, amely tetszőleges 2 és 10 közötti egész alap esetén kiszámolja, és egy cellába írja egy 10-es számrendszerbeli szám adott számrendszerben felírt értékét! Legfeljebb 8 jegyre készüljön fel, de egyetlen képlet másolásával még néhány jegyre bővíthető legyen! Az eredményt az „Eredmény:” melletti cella tartalma adja. Használható a maradék() és az int() függvény is. Itt is segít a feladat feletti ábra!

Külön figyelmet érdemel a kettes számrendszer. Itt csak két számjegyünk van, a 0 és az 1. Itt kétüveges rekeszekre, kétrekeszes oszlopokra, két oszlopból álló furgonra stb. kell gondolni. Ha bármilyen egységből kettő összegyűlik, azt rögtön egy nagyobb egységre válthatjuk.
Igen érdekes mintázatot ad, ha például az első 32 szám kettes számrendszerbeli alakját felírjuk. Érdemes csak az 1-esek helyére koncentrálni, az egységesebb kép céljából a vezető 0-kat is kiírattuk az Excellel (a jobb oldali keskeny képen látható).

	A	B	C	D	E	F
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	1
3	2	0	0	0	1	0
4	3	0	0	0	1	1
5	4	0	0	1	0	0
6	5	0	0	1	0	1
7	6	0	0	1	1	0
8	7	0	0	1	1	1
9	8	0	1	0	0	0
10	9	0	1	0	0	1
11	10	0	1	0	1	0
12	11	0	1	0	1	1
13	12	0	1	1	0	0
14	13	0	1	1	0	1
15	14	0	1	1	1	0
16	15	0	1	1	1	1
17	16	1	0	0	0	0
18	17	1	0	0	0	1
19	18	1	0	0	1	0
20	19	1	0	0	1	1
21	20	1	0	1	0	0
22	21	1	0	1	0	1
23	22	1	0	1	1	0
24	23	1	0	1	1	1
25	24	1	1	0	0	0
26	25	1	1	0	0	1
27	26	1	1	0	1	0

M83: Készítsük el ezt az Excel-táblát, amelyben az azonos színű területeket egyetlen képlet másolásával töltjük ki!

Most egy kettes számrendszeren alapuló bűvésztrükköt mutatunk be. A trükk a következő: A bűvész megkér néhány nézőt, hogy gondoljanak egy 1 és 500 közé eső egész számra. Ezután néhány hosszúkás, színes lapot tart eléjük, melyeken hemzsegnek a számok, a bűvész megkéri a nézők mindegyikét, hogy mutassák meg, melyik lapokon szerepel a számuk. Ha egy néző megmutatja, a bűvész épp csak ránéz a lapokra, felnéz a plafonra, csinál néhány varázskört a pálcájával, majd megmondja a számot.

1				
	2			
3	3			
		4		
5		5		
	6	6		
7	7	7		
			8	
9			9	
	10		10	
11	11		11	
		12	12	
13		13	13	
	14	14	14	
15	15	15	15	
				16
17				17
	18			18
19	19			19
		20		20
21		21		21
	22	22		22
23	23	23		23
			24	24
25			25	25
	26		26	26
27	27		27	27
		28	28	28
29		29	29	29
	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Az érthetőség kedvéért csak 1-31-ig készítettük el a lapokat, mindegyik egy színes, álló csík (baloldali kép). E lapokon „szellősen vannak a számok, az ábra szerint egymás mellé passzítva minden sorban csak egy szám látható, így követhetjük, mely szám mely lapokon szerepel. A bűvész valódi lapjain természetesen „sűrűn írva" szerepelnek a számok.

A lapokat így készítettük: Minden számot kettes számrendszerbe írunk át. Az első lapon azok láthatók, amelyeknek az utolsó kettes számrendszerbeli számjegye 1, a másodikon azok, melyeknek az utolsó előtti jegyük 1, és így tovább, az ötödik lapon azok a számok szerepelnek, amelyekben hátulról az ötödik helyen 1-es áll.

Így ha például a néző azt mondja, hogy az első, a negyedik és az ötödik lapon látja a gondolt számát, akkor a gondolt szám kettes számrendszerbeli alakja $11001_{(2)}$, tehát a szám $1 \cdot 16+1 \cdot 8+0 \cdot 4+0 \cdot 2+1 \cdot 1=25$. De sokkal egyszerűbb a dolgunk, ha megfigyeljük, hogy minden lapon épp az a kettőhatvány az első szám, amelyiket jelzi az adott lap. Így tehát csak a választott lapok első számait kell összeadni a bűvésznek. Erre van is ideje, amíg fennakadt szemekkel a mutatványhoz tartozó hókuszpókuszokat végzi.

M84: Készítsük el azt az Excel-táblát, amelyben mindegyik bűvész-lap mindegyik számát egyetlen képlet másolásával töltjük ki! A táblázat legyen vízszintes és függőleges irányban is csak képletmásolással bővíthető!

M85: Egy ház vízóráján elromlott a számláló. Mint tudjuk, öt korong van a 0-9 számjegyekkel beszámozva, ezek mutatják a fogyasztott köbméterek számát. Ha egy kis korong a 9-esről 0-ra gördül, akkor az előtte levő kis korongot egy számmal továbblöki. A számláló oly módon romlott el, hogy minden kis korongon „átugrik" egy-egy számot: az elsőn az 1-est, a másodikon a 2-est, a harmadikon a 3-ast, a negyediken a 4-est és az ötödiken az 5-öst. Tehát például az első hat köbmétert 00001, 00002, 00003, 00004, 00006 és 00007 jelzi. Mennyit fogyasztott a háztulajdonos, ha a számláló 24783 állást mutat?

Mennyit fog mutatni a hibás számláló, ha a ház vízfogyasztása eléri az 55555 köbmétert?

Egy érdekes feladat, amelyben nem szerepel számrendszer, de a megoldása számrendszerekkel kapcsolatos:
Válasszunk ki a 0-tól 80-ig terjedő egészek közül 16 számot, hogy semelyik három különböző kiválasztott szám ne legyen egy számtani sorozat három szomszédos eleme!
Ha *a*, *b* és *c* szám egy számtani három szomszédos elemei, akkor $a=b-d$ és $c=a+d$, ahol *d* a sorozat differenciája. Ekkor igaz, hogy $\frac{a+c}{2}=\frac{b-d+b+d}{2}=\frac{2b}{2}=b$, azaz a két szélső szám átlaga a középső. Írjuk fel a 0-80 számokat a hármas számrendszerben, s egészítsünk ki vezető nullákkal minden számot négy jegyre!
Így $0=0000_{(3)}$; $1=0001_{(3)}$; $2=0002_{(3)}$; $3=0010_{(3)}$; $4=0011_{(3)}$; $5=0012_{(3)}$; ... ; $80=2222_{(3)}$. Most válasszuk ki azokat a számokat, amelyekben csak 0 és 2 jegyek szerepelnek. Ilyen szám pontosan 16 darab van. Azt állítjuk, hogy semelyik két különböző kiválasztott szám átlaga nem lehet a kiválasztottak között, mert tartalmazni fog 1-es számjegyet a hármas számrendszerbeli alakja. Két kiválasztott szám átlagának számításakor ugyanis a bennük szereplő három-hatványok számát tudjuk átlagolni: Tekintsünk két különböző kiválasztott számot, és írjuk egymás alá hármas számrendszerbeli alakjukat! Ha egymás alá kerül két kettes, ott az átlagban is kettes lesz. Ha egymás alá kerül két nulla, ott az átlagban is nulla lesz. Mivel a két szám különbözik, lesz olyan hely, ahol egy nulla és egy kettes van egymás (egyik a másik) alatt. A két szám átlagában itt egyes lesz!
Csak a rend kedvéért álljon itt a megfelelő 16 szám: 0; 2; 6; 8; 18; 20; 24; 26; 54; 56; 60; 62; 72; 74; 78; 80.
Nyilván hasonló módszerrel lehet a 0; 1; 2; ... ; 3^n-1 számok közül is 2^n darabot hasonló feltételekkel kiválasztani.

M86: Egy öt súlyból álló súlykészlettel a (dekagrammban mérve) 1; 2; .. ; n tömegű testek mindegyike megmérhető úgy, hogy a súlyokat a kétkarú mérleg bal serpenyőjébe, a testet a jobb serpenyőbe tesszük. Adjunk meg egy ilyen súlykészletet úgy, hogy az n értéke a lehető legnagyobb legyen! Feltételezzük, hogy a megmérendő test dekagrammban mérve egész tömegű.
M87: Egy öt súlyból álló súlykészlettel a (dekagrammban mérve) 1; 2; .. ; n tömegű testek mindegyike megmérhető, úgy, hogy a testet a kétkarú mérleg jobb serpenyőjébe tesszük, a súlyokat pedig a bal és jobb serpenyőbe is tehetjük. Adjunk meg egy ilyen súlykészletet úgy, hogy az n értéke a lehető legnagyobb legyen! Feltételezzük, hogy a megmérendő test dekagrammban mérve egész tömegű.

Érdekes kapcsolat van a számrendszer alapszáma és az adott számrendszerbeli oszthatósági szabályok között. Figyeljük meg a tízes számrendszer oszthatósági szabályait!
A kettes és az ötös oszthatóság szabálya hasonló: a 2 vagy az 5 *n*-edik hatványával osztható egy szám, ha az utolsó *n* jegyéből álló szám osztható 5-tel vagy 2-vel. Ez azért van, mert $10=2\cdot5$, s emiatt $2^n|10^n$ és $5^n|10^n$ – tehát az első *n* jegyet nem kell figyelni.
Íme egy példa: 8|9363552, mert $9363552=9363\cdot10^3+552$ és $8|10^3$, továbbá 8|**552**.
A kilences oszthatósághoz a számjegyek összegét kell vizsgálni. Ez azon alapul, hogy $10^n-1=(10-1)(10^{n-1}+....+1)$, azaz $9|10^n-1$. Egy példával: 9|2574, mert:
$2574=2\cdot1000+5\cdot100+7\cdot10+1=2\cdot(999+1)+5\cdot(99+1)+7\cdot(9+1)+4=(2\cdot999+5\cdot99+7\cdot9)+$ **2+5+7+4**, s ezen összeg első fele és második fele is osztható 9-cel. Mivel a 3 a 9-nek osztója, ezért e szabály a 3 esetére is igaz.

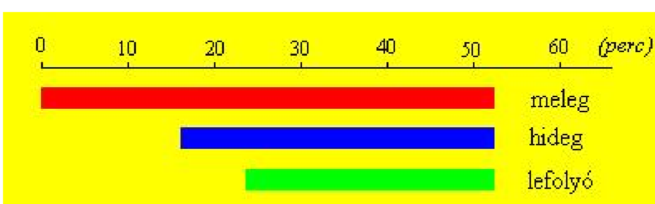
A tizenegyes oszthatósághoz a számjegyek váltakozó előjelű összegét kell vizsgálni. Ez azon alapul, hogy 10^{2n}-1=100^{n}-1=(100-1)(10^{n-1}+....+1), azaz 11|10^{2n}-1, továbbá 10^{2n+1}+1=(10+1)(10^{2n}-10^{2n-1}+...-10+1), azaz 11|10^{2n+1}+1.
Egy példával: 11|28567, mert:
28567=2·10000+8·1000+5·100+6·10+7=2·(9999+1)+8·(1001-1)+5·(99+1)+6·(11-1)1+7=
(2·9999+8·1001+5·99+6·11) + (**2-8+5-6+7**) , s ezen összeg első fele és második fele is osztható 11-gyel.
E szabályok más számrendszerekre is átvihetők. Tehát egy *x* alapú számrendszerben az *x* összes osztójára, valamint az *x*–1 és *x*+1 számok összes osztóira van oszthatósági szabály!

M88: Írjuk fel a 14-es számrendszerben minél több 20-nál kisebb számmal való oszthatóság szabályát! Mindegyik szabályt példán keresztül mutassuk be!
M89: Igazoljuk, hogy az $1331_{(x)}$ bármely x>3 alapú számrendszerben egy egész szám köbe!
M90: Igazoljuk, hogy a $4053_{(x)}$ egy x>5 alapú számrendszerben nem lehet prímszám!

„Egyenletlenségek”

Sokszor kapunk olyan alkalmazott matematikai feladatot, amelynek megoldásánál nyilvánvalóan látszik, hogy hozzá algebrai modellt alkotva, azaz egyenletet vagy egyenletrendszert készítve megoldható a feladat.
Ez a munkalap ízelítőt ad nem algebrai jellegű feladatmegoldásokból. Ezek teljes értékű megoldásai egy-egy feladatnak, akár egy dolgozatban, akár az érettségin vagy bármilyen szintű matematikaversenyen adunk ilyen fajta megoldást. Elég ugyanis bármely matematikai feladat megoldásához, ha megmondjuk, hogy a feladat alaphalmazának mely elemei megoldások és megmondjuk, hogy más elemei miért nem lehetnek megoldások. Természetesen, ha egy feladatot okoskodással oldunk meg, akkor világos fogalmazású mondatokban, pontosan és logikusan kell elmagyaráznunk megoldásunk gondolatmenetét.
E munkalap feladatainál érdemes odafigyelni: helyenként KIZÁRÓLAG „okoskodásos”, nem egyenlettel való megoldást kér a munkalap, más helyen éppen az egyenlettel való megoldás a feladat!

1. feladat: Egy medencét a hideg víz csapja 1 óra alatt, a meleg víz csapja 80 perc alatt tölti meg. A teli medencét egy lefolyó-szivattyúval 2 óra alatt lehet üríteni. Egy alkalommal az üres medence megtöltéséhez kinyitották a melegvizes csapot. 17 perc múlva megnyitották a hidegvizes csapot is, majd újabb 7 perc múlva valaki véletlenül elindította a lefolyót is. Összesen mennyi idő alatt telt meg így a medence?
<u>Megoldás okoskodással:</u> Számoljunk percekben! A hidegvizes csap 1/60, (azaz 4/240) a melegvizes pedig 1/80 (azaz 3/240) részét tölti meg a medencének egy perc alatt. A lefolyó megnyitásáig így a melegvizes csap 24 perc alatt 24·3/240, a hidegvizes pedig 7·4/240 részt, azaz együtt összesen 100/240 részét töltötték meg a medencének. Tehát amikor a lefolyót megnyitják, akkor a medence 140/240 részét kell még megtölteni. Ha egyszerre van nyitva a két csap és a lefolyó, akkor minden percben 1/60+1/80-1/120=5/240 része telik meg a medencének. Ha a hátralévő 140/240 medencerészt elosztjuk ezzel, akkor megkapjuk, hány perc alatt töltik meg az utolsó szakaszban: 28. Így a medence megtöltésének teljes ideje: 17+7+28=52 perc.
E feladatot (és az összes ilyen jellegű feladatot!) még szemléletesebbé tehetjük, ha „időszalagot” készítünk hozzá.



Ezen jól megfigyelhető, hogy melyik pillanatban melyik csap vagy lefolyó volt nyitva.
Az időszalag az algebrai megoldásnál is segít, vele könnyebb a megfelelő egyenlet felírása.

2. feladat: Béla feltörte a malacperselyét, amelyben csak 5, 10 és 20 forintosokat talált. 65 pénzdarab volt benne, összesen 740 forint értékben. Béla megfigyelte, hogy ugyanannyi ötforintos van, mint ahány húszas. Mennyi öt-, tíz- és húszforintos volt a perselyben?

Megoldás okoskodással: Ha mind a 65 pénzdarab 10 forintos lenne, akkor 650 forint lenne a perselyben. Ha két tízforintost kicserélünk egy öt- és egy húszforintosra, akkor öt forinttal növeljük a pénz mennyiségét, ráadásul így teljesül, hogy azonos darabszámú ötös és húszas lesz. Ismételjük újra meg újra ezt a „cserét", amíg a pénzösszeg 740 forint nem lesz! A 650 forinthoz 90 forint hiányzik, hogy 740 legyen. Ha minden „csere" 5 forinttal növel, akkor tehát 18 cserére van szükség. Azaz 18 darab ötös és 18 húszas lesz, míg a tízesek száma 2·18=36-tal csökkent. Így 65-36=29 darab 10 forintos van**.**

3. feladat: Egy előadóteremben egy csoport tanuló szeretne helyet foglalni. Ha minden asztalhoz csak 8 tanuló ülhetne, akkor kilencüknek nem jutna hely. Ha minden asztalnál 10 ülőhely volna, akkor pedig 15 hely üresen maradna. Hány asztal van a teremben és hány személyből áll a csoport? (Az *Egységes érettségi feladatgyűjtemény* 920. feladata az *Egyenletrendszerek* témakörből.)

Megoldás okoskodással: Mi lenne, ha 15-tel több tanuló lenne? Akkor a létszám épp az asztalok számának 10-szerese lenne. Ha most csökkentenénk minden asztalnál a helyek számát, akkor asztalonként két tanuló állna fel, s akkor épp a feladat első felében leírt eset állna elő. Az eltérés az első és második esetben leült diákok közt 9+15=24 fő, s ez az asztalok számának kétszerese. Tehát 12 asztal van, s 8·12+9=105 személy.

4. feladat: Egy folyami hajó állóvízi sebessége 22km/h. Elindul a folyón lefelé A városból B városba, ott pontosan fél órát áll, majd a folyón felfelé visszaindul B-ből A-ba. Az egész utat 4 óra 54 perc alatt tette meg. Milyen távolságra van egymástól az A és a B kikötő, ha a folyó folyási sebessége 2 km/h?

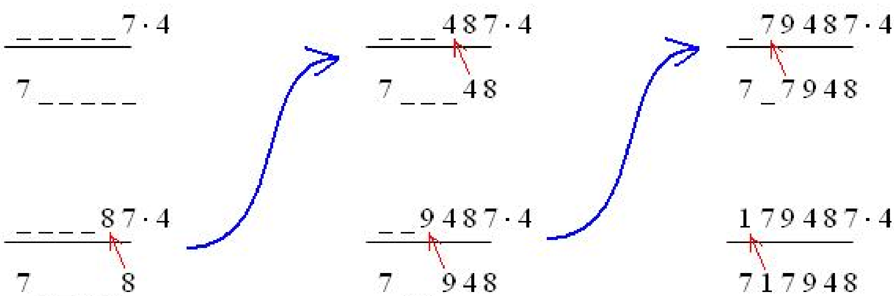
Megoldás okoskodással: Számoljunk órákkal, kilométerekkel és km/h-ban mért sebességekkel! Tudjuk, hogy a hajó valódi (azaz a parthoz viszonyított) sebességét megkapjuk, ha a folyón felfelé haladva az állóvízi sebességéből levonjuk, a folyón lefelé haladva pedig az állóvízi sebességéhez hozzáadjuk a folyó sebességét. Így 20 km/h és 24 km/h sebességeket kapunk. Ugyanazt az utat kell megtennie felfelé és lefelé, az azonos utakon a sebesség és az idő fordítottan arányos egymással, mert szorzatuk állandó. A sebességek aránya 20:24 (azaz 5:6) tehát ennek reciproka a két mozgás időinek aránya, azaz 6:5. Az összes idő átváltva 4,9 óra, vagyis 4,4 óra az oda és visszaút időinek összege. Ezt fel kell osztani 6:5 arányban, vagyis az ezt 11-gyel osztva kapott 0,4 órát be kell, hogy szorozzuk 6-tal és 5-tel. A felfelé út ideje tehát 2,4 óra, a lefelé út ideje pedig 2 óra. Ha felfelé 2,4 órán át megy a hajó 20 km/h sebességgel, akkor az út 20·2,4=48 km. (Ugyanez jön ki, ha a lefelé út idejéből és sebességéből számolunk.)

5. feladat: Egy háromjegyű számban a számjegyek összege 17. Az első jegy duplája a másodiknak. A szám öttel több, mint jegyei négyzetösszegének nyolcszorosa. Melyik ez a szám?

Megoldás okoskodással: Az első két számjegy összege háromszorosa a második jegynek, ezért osztható kell, hogy legyen hárommal. Viszont a három számjegy összege 17, ezért az első két jegy összege nem lehet 8-nál kisebb. Tehát az első két jegy összege csak 9, 12 vagy 15 lehet, de mivel az első jegy ennek kétharmada, nem lehet sem 10, sem 12. Tehát csak 6 vagy 8 lehet, így a szám a 845 vagy a 639. Ellenőrizve: a kettő közül csak a 845-re teljesül, hogy $845=(8^2+4^2+5^2)\cdot 8+5$.

6. feladat: Egy hatjegyű szám utolsó jegye 7. Ezt a 7-est a végéről az elejére írva a szám 4-szeresét kapjuk. Melyik ez a hatjegyű szám?

A szorzást felírhatjuk úgy, ahogy a kézi szorzást végezni kell. A megoldást az ábra mutatja.



Minden lépésben elvégezzük a következő jeggyel való szorzást, de mivel a szorzandó és a szorzat számjegyei azonosak, csak eggyel el vannak tolva, rögtön be lehet írni a szorzandó előző helyi értékére (ezt a piros nyilak jelzik). A kapott szám az 179487, ez az egyetlen lehetséges megoldás.

7. feladat: Két egész szám összege 120, szorzata 3456. Határozza meg a számokat! (Az *Egységes érettségi feladatgyűjtemény* 935. feladata az *Egyenletrendszerek* témakörből)

Megoldás okoskodással: Határozzuk meg a 3456 prímtényezős felbontását! $3456 = 2^7\cdot 3^3$. Két olyan szorzótényezőre kell bontani, amelyek összege 120. Ha egyik tényezőben nincs 3-as prímtényező, akkor a két tényező összege nem lenne 3-mal osztható. Így egyikben kettő, másikban egy darab 3-as prímtényező lehet. Mivel mindkét tényező kisebb kell legyen 120-nál, ezért a 3^2 mellé legfeljebb három 2-es prímtényezőt lehet választani. A lehetséges osztópárok tehát: $(3^2\cdot 2^3)\cdot(3\cdot 2^4)=72\cdot 48$, $(3^2\cdot 2^2)\cdot(3\cdot 2^5)=36\cdot 96$, $(3^2\cdot 2)\cdot(3\cdot 2^6)=18\cdot 192$ vagy $(3^2)\cdot(3\cdot 2^7)=9\cdot 384$. Ezek közül csak a 72 és a 48 összege 120, ez a két keresett szám.

8. feladat: Azt mondja egy apa a fiának: Három évvel ezelőtt én 9-szer olyan idős voltam, mint te, viszont 6 év múlva 12-szer annyi éves leszek, mint te voltál 3 évvel ezelőtt. Hány éves most az apa és a fia? (Az *Egységes érettségi feladatgyűjtemény* 921. feladata az *Egyenletrendszerek* témakörből.)

Megoldás okoskodással: Figyeljük meg, hogy az apa mindkétszer ahhoz az életkorhoz viszonyít, ahány éves volt a fia 3 éve. Ennek a 9-szereséről és 12-szereséről van szó, e két mennyiség különbsége tehát a megfigyelt életkor háromszorosa. Egyik 3 éve volt, a másik 6 év múlva lesz, tehát ezek különbsége 9, így a fiú 3 évvel ezelőtt ennek harmada, 3 éves volt. Az apa 27 volt akkor, tehát most a fiú 6 éves, az apa 30.

Feladatok

M91: Oldd meg okoskodással: Xénia 80 perc alatt hordja tele vízzel a medencét, Yvonne 70 perc alatt, Zalán 60 perc alatt. Mennyi idő alatt végeznek a munkával együtt? (Egységes érettségi feladatgyűjtemény 626. feladata.)

M92: Oldd meg okoskodással: Három egymást követő természetes szám négyzetének összege 974. Melyek ezek a számok? (Egységes érettségi feladatgyűjtemény 698. feladata.)

M93: Oldd meg okoskodással: Egy parkolóban 50 jármű áll: autók, motorkerékpárok és buszok. A járművek kerekeinek száma rendre 4, 2, illetve 6; összesen 184 kerekük van. Hány darab van egy-egy gépjárműtípusból, ha tudjuk, hogy a buszok száma egyötöde az autók számának? (Egységes érettségi feladatgyűjtemény 644. feladata.)

M94: Oldd meg okoskodással: Egy négyjegyű szám utolsó jegye 8. Ha ezt a szám végéről az elejére írjuk, akkor az eredetinél 3204-gyel nagyobb számot kapunk. Melyik ez a szám? (Egységes érettségi feladatgyűjtemény 622. feladata.)

M95: Oldd meg okoskodással: Egy túra egyik résztvevője minden nap elkölti pénzének felét és még 200 forintot. A kitűzött távot három nap alatt sikerült megtennie, amikor pénze elfogyott. Hány forinttal indult útnak a turista? (Egységes érettségi feladatgyűjtemény 631. feladata.)

M96: Oldd meg okoskodással: Egy szállodában 24 szoba van, összesen 64 férőhellyel. A szobák két-, illetve háromágyasak. Hány kétágyas szoba van? (Egységes érettségi feladatgyűjtemény 632. feladata.)

M97: Oldd meg okoskodással: Egy négyjegyű szám első két jegyének és utolsó két jegyének összege is 10. Ha a számot középen „kettévágjuk”, akkor a kapott két kétjegyű szám négyzetösszegének duplája 259-cel kisebb, mint az eredeti szám. Ha fordított sorrendben írjuk le a számjegyeket, az így kapott szám 5454-gyel nagyobb az eredetinél. Melyik ez a szám?

M98: Oldd meg egyenlettel az 1, 2, és a 4. feladatokat!

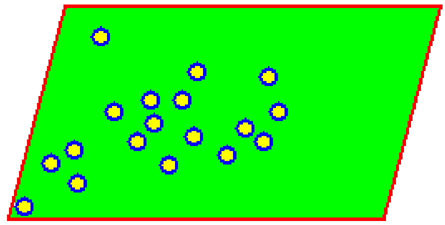
M99. Oldd meg egyenlettel az 5. és a 6. feladatokat!

M100. Oldd meg egyenlettel az M97. feladatot!

Hátha valaki nem ismeri...

Ez a rész olyan közismert feladatokat gyűjtött össze, melyek „közszájon forognak”, mondhatni, hozzátartoznak a matematikai alapműveltséghez. A feladatokban közös, hogy szellemesek, ötletesek, szépek – s a megoldásukhoz többnyire csak logikára van szükség.

1. Egyszer két diák vitatkozott, melyikük jobb matematikából. A tanárukhoz fordultak, hogy döntse el vitájukat. A tanár ennek eldöntésére egy matematikai játékot ajánlott nekik:



–Itt ez a paralelogramma alakú asztal, s itt van egy dobozban rengeteg azonos méretű kis korong. Az asztalra kell felváltva letennetek a korongokat, mindegyikőtök egy lépésben csak egyet tehet le. A korongok akár érintkezhetnek is, de nem fedhetik egymást sehol, s a már régebben letett korongokat nem szabad elmozdítani. Az veszít, aki nem tud már tenni, vagyis akinek először esik le egy korongja az asztalról.

Miután kisorsolták, ki kezd, a kezdő diák letette az asztalra az első korongot. A másik diák ekkor megszólalt:

– Nyertél! – A tanár a fejét csóválta:
– Nem tudok dönteni, mert mindketten igen jól tudjátok a matematikát!

Miért mondta ezt a tanár? Hová került az első korong?

<u>Megoldás</u>: Az első diák az asztal közepére tette a korongját. Azt tervezte, hogy bárhová teszi is társa a korongját, ő az azt követő lépésében az asztal középpontjára tükrözi a letett korong helyét, s ezt a stratégiát tartja ezután. Így minden lépésben olyan helyre tesz, ahol biztosan van még hely, tehát csak a másik veszíthet. Ezt a gondolatmenetet végiggondolta a második diák is, s látta, hogy reménytelen tovább játszani. Amikor a tanár látta, hogy mindketten rájöttek erre a stratégiára, megdicsérte mindkettejüket.

2. Egy túravezető egy nyolcfős csoporttal túrázik. Egyszerre csak egy útelágazáshoz érnek, ahol négyfelé lehet továbbmenni. A túravezető emlékezete szerint valamelyik úton 20 percnyi járásra van a turistaház, ahol meg tudnak szállni. Mivel egy óra múlva sötét lesz, ezért a túravezető csoportokra osztja a turistákat (önmagát is „beosztva”), s azt kéri tőlük, hogy minden csoport menjen 20 percig egy-egy úton, és akkor akár meglátják a turistaházat, akár nem, mindenképp forduljanak vissza. Így ha 40 perc múlva visszaérnek az elágazáshoz, s elmondják, meglátták-e a szállást, akkor kiderül, melyik úton kell majd elindulni. A vezető indulás előtt megtudta, hogy két tréfamester van a turisták közt, akik néha hazudnak, néha igazat mondanak, attól függően, hogy milyen épp a hangulatuk. Sajnos az nem derült ki, melyik két turista lehet a tréfamester. Hogyan kell a „felderítőcsoportokat” kialakítani, hogy beszámolóik gyors mérlegelése után mindenképp biztosan elérhessen a túracsoport

sötétedésig a turistaházba? (A túravezető becsületes, ő nyilván nem hazudik „saját magának”...)

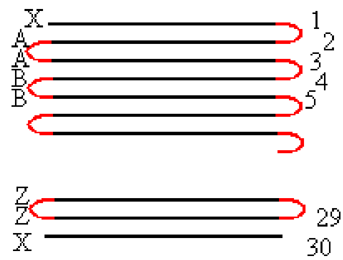
Megoldás: A túravezető két háromfős és egy kétfős csoportra osztja a turistákat. Elküldi őket három úton, a negyediken saját maga indul el. Ha ő meglátja a szállást, nem törődik a turisták beszámolóival, elviszi őket a saját útján.
Ha az ő útján nem volt turistaház, akkor meghallgatja a turisták beszámolóit.
Ha minden csoport minden embere egybehangzóan ugyanazt állítja, akkor a két hármas csoport biztosan igazat mond, s e két információ alapján megvan, hol lehet a szállás. (Lehet esetleg mindkét tréfamester a kétfős csoportban, s hazudhatnak akár mindketten, de ez így nem lesz figyelembe véve.)
Ha egy olyan csoport van, ahol különböznek a beszámolók (pl.: egyik turista azt állítja, hogy meglátták a szállást, kettő pedig azt, hogy nem – nevezzük ezt „ellentmondó” csoportnak), ott biztosan van tréfamester, ezen ellentmondó csapat tagjainak a beszámolóit nem vesszük figyelembe, így a többi csoport minden tagja biztosan igazat mond, s beszámolóik alapján egyértelmű, merre van a szállás.
Ha két olyan csoport van, ahol különböznek a tagok beszámolói (két ellentmondó csoport), ott mindkettőben biztosan van hazudó tréfamester, de e két csapat közül legalább az egyik biztosan háromtagú. Egy háromtagú ellentmondó csoport két tagjának a beszámolója megegyezik, s mivel ez esetben csak egy tréfamester lehet a csoportban, biztos, hogy ők ketten igazat mondanak. Így a háromfős ellentmondó csoportokról tudhatjuk, hogy megtalálták-e a szállást, s ennek alapján már megmondható, merre kell menni.

3. Egy folyó alatt kábelköteget vezettek át, amelyben 30 kábel van. Sajnos, mindegyik kábel azonos színű és vastagságú, így nem lehet őket megkülönböztetni. A kábelköteget lefektető munkások elfelejtették megjelölni, hogy a folyó egyik partján levő kábelvégeknek melyik a másik vége a túlparton. Egy villanyszerelőnek adják azt a feladatot, hogy derítse ki: melyik kábelvéghez melyik túlparti kábelvég tartozik. Ehhez a szokásos eszközök állnak rendelkezésére: bármelyik két kábelvéget össze tudja forrasztani bármelyik parton, illetve egy műszerrel meg tudja mérni, hogy két különálló kábelvég közt van-e fémes összeköttetés (pl.: ellenállást mér).

Milyen módon tudja a lehető legkevesebb átkeléssel kideríteni, melyik egyik parti kábelvégekhez melyik túlparti kábelvégek tartoznak?

Egyik megoldás a több lehetséges közül: Az első átkelés előtt a szerelő az egyik parton kettesével azonos betűvel jelöl, majd párosával összeköt egymáshoz 28 kábelvéget, míg kettőt nem köt semmihez, e két „szabadon hagyott” kábelvéget egy-egy X-szel megjelöli.
A szerelő átkel a folyón, majd a túlsó parton megméri, melyik kábelek innenső végei vannak összekötve. Kiválasztja az egyik X jelű, „szabad” kábel túlsó végét, és 1-es számmal megjelöli. Ehhez hozzáköti egy innenső oldalon összekötött párnak az egyik végét, ezt 2-essel, majd e pár másik végét 3-assal jelöli. A 3-assal jelölt kábelhez

hozzáköti egy újabb innenső oldalon összekötött párnak az egyik végét, ezt 4-essel, majd e pár másik végét 5-össel jelöli. Az 5-össel jelölt kábelhez hozzáköti egy újabb innenső oldalon összekötött párnak az egyik végét, ezt 6-ossal, majd e pár másik végét 7-essel jelöli. Ezt folytatja, amíg az összes pár el nem fogy. Az utolsó párnak a 29-essel jelzett második kábelét már nem köti össze már semmivel sem. A végén a fel nem használt X jelű másik kábel túlsó végére írja a 30-as számot.

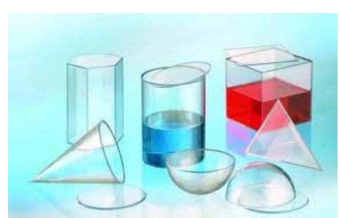


A szerelő újra átkel a folyón, majd az innenső parton megméri, melyik kábelek túlsó végei vannak összekötve. Amelyik X jelű kábel nem volt semmihez hozzákötve, azt 30-assal jelöli. Amelyik X jelű kábel túlsó vége össze van kötve valamivel, az lesz az 1-es. Amihez az 1-es a túloldalon kötve van, az a 2-es. A 2-esnek az innenső oldalon levő (azonosan betűzött) párja lesz a 3-as, amivel a 3-as a túloldalon össze van kötve, az lesz a 4-es. A 4-esnek az innenső oldalon levő (azonosan betűzött) párja lesz az 5-ös, amivel az 5-ös a túloldalon össze van kötve, az a 6-os. Ha így halad tovább a szerelő, mindegyik túlparti számozott kábel végét megtalálhatja.
Egy átkelés nem lett volna elég, mert bármennyi kábelt köt is össze a szerelő az innenső parton, a túlparton még nem tudja azokat megkülönböztetni egymástól.

4. Egy édességüzemben egy dkg-os szaloncukrokat gyártanak. A cukrokat tíz gép teszi zacskókba, egy ilyen gépnek pontosan 50 cukrot kell tennie egy zacskóba, s mivel a zacskó tömege is pontosan 1 dkg, ezért minden ilyen cukorral teli zacskó tömege 51 dkg. Előfordulhat, hogy egy gépet hibásan állítottak be, ilyenkor 50 helyett 51 darab cukrot tesz minden zacskóba. Van továbbá az üzemben egy precíziós mérleg, mely dkg pontossággal mér akár nagyobb tömegeket is. Tudjuk, hogy egy gépet rosszul állítottak be, a többi jól működik. Hogyan választhatjuk ki egy méréssel a hibás gépet? (Rendelkezésre áll mindegyik gép által készített rengeteg zacskó cukor.)

Megoldás: Az első gép által gyártott zacskók közül egyet, a második gép zacskóiból kettőt, a harmadikéból hármat teszünk a mérlegre, és így tovább, az utolsó gép által gyártott zacskókból tízet teszünk fel a mérlegre, összesen 1+2+3+...+10=55 zacskót. Ezeknek összes tömege 55·51=2805 dkg lenne, ha nem lenne hibás gép. Ahány dkg eltérést ad a mért érték ettől, annyi zacskóban van eggyel több cukor, annyiadik gép a hibás.

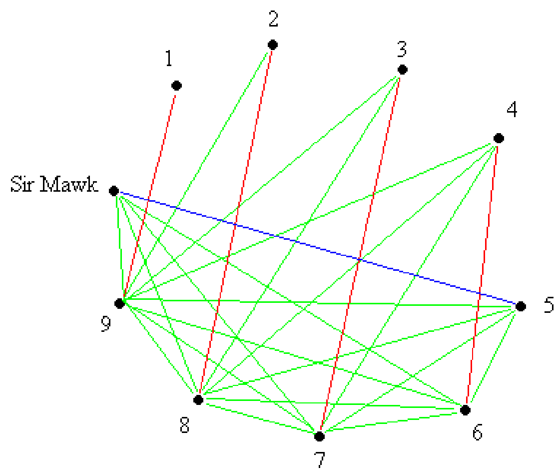
5. Adjunk meg a térben hét testet úgy, hogy mindegyik pontosan három másikat érintsen!



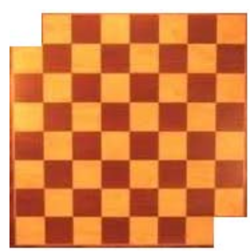
Megoldás: Számoljuk össze az érintési pontok számát! Mind a hét test esetében van három-három érintési pont, ezért így huszonegy érintési pont lett összeszámolva. De minden érintési pontot kétszer számoltunk, mivel két testhez tartozik. Így az érintési pontok száma 21/2= 10,5 lenne, de ez lehetetlen! A feladatnak tehát nincs megoldása. (Vessük össze az 1. feladatlap első két feladatával!)

6. Sir és Lady Mawk új városba költöznek, s lakásavatót szeretnének tartani. Vannak ismerőseik a városban, de nem akarják, hogy csupa ismerős legyen az összejövetelen, ezért a telefonkönyvből böknek ki 4 házaspárt, akiket elhívnak. A lakásavatón tehát a házigazdákkal együtt tízen vannak, közülük nem tudni, ki, kit ismert már régebbről, csak egy biztos, hogy a házastársát mindenki ismeri... Sir Mawk is tudja ezt, éppen ezért körbejár éjfélkor és mindenkitől (saját feleségétől is) megkérdezi, hogy hány embert ismer a társaságból. Meglepődik, mert a jelenlévők csupa különböző számokat mondanak neki válaszként. Hány embert ismer Lady Mawk? (Az ismeretségek kölcsönösek!)

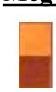
Megoldás: Mivel nullát senki nem mondhatott, ezért az elhangzott válaszok az 1, 2, 3, ... 9 számok voltak. Akinek 9 ismerőse van, az mindenkit ismert, aki 1-et mondott az csak a 9-et ismerő személyt ismeri, tehát ők házastársak. Hagyjuk ki őket a társaságból (képzeljük azt, hogy ők hazamennek)! A maradék 8 ember mindegyikénél eggyel csökkent az ismeretségek száma, mert elment az a személy, aki mindegyiküket ismerte. Így a 8 fős maradék társaságban a Sir Mawk-on kívüli személyek ismeretségeinek száma: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Aki közülük 7 személyt ismer, az mindenkit ismer, ismeri az 1 ismeretségűt is, de az csak a házastársát ismeri, tehát ők házastársak. Őket „képzeletben hazaküldve” ugyanilyen hatfős társaságot kapunk, és így tovább, egészen addig, amíg csak ketten maradnak: Sir Mawk és egy olyan személy, aki egyik eltávozott személynek sem házastársa. Ő csak Lady Mawk lehet, az eddigiek szerint ő ismerte a négy eltávozott házaspárnak egy-egy tagját. Ismeri továbbá Sir Mawk-ot is, tehát 5 személyt ismert.



7. Egy sakktábla 64 mezője lefedhető 32 olyan „dominóval”, amelyek közül mindegyik pontosan két mezőt takar el. De hogyan fedhető be a sakktábla 31 dominóval úgy, hogy a két átlósan szemben fekvő sarokmező maradjon szabadon?



Megoldás:



Nem létezik ilyen lefedés, mivel az átlósan szemben fekvő mezők azonos színűek. Egy dominó mindig egy sötét és egy világos mezőt fed le. A 31 dominó lerakása után egy világos és egy sötét mezőnek kellene kimaradni.

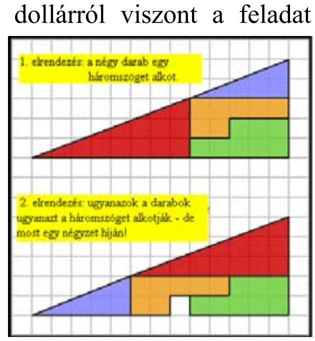
8. Egy tökéletesen kör alakú tóban úszol. Épp a tó közepén vagy, amikor megjelenik a parton egy éhes oroszlán. Az oroszlán szerencsére nem tud úszni, de ha a parton elkap, megesz. A szárazföldön ugyanolyan gyorsan tudtok futni, tehát ha kiérsz a partra, és az oroszlán épp nincs ott, akkor megmenekültél. Viszont az oroszlán 4-szer gyorsabban fut a szárazföldön, mint ahogy Te a vízben úszol! Hogy tudsz megmenekülni?

Megoldás: Legyen R sugarú a tó. Elkezdesz kifelé úszni, amíg az R/4 sugarú kört majdnem eléred. Ezen a körön belül körbeúszva még gyorsabb vagy az oroszlánnál, mert pont R/4 sugarú körnél lesz négyszer akkora a part kerülete. Így el tudod érni, hogy az oroszlán pont a legmesszebb legyen, amikor „majdnem” eléred R/4 kört (akár 0,01R-nyire megközelítheted ezt a kört a 0,24R sugarú körön.) Ekkor elindulsz a legközelebbi part irányába. Ez 3/4R és egy „pici” (azaz példánkban 0,76R). Az oroszlánnak van R·π (félkörnyi) útja. Ezek aránya: $\frac{\pi}{0{,}76} \approx 4{,}13$, tehát több mint 4-szer akkora utat kell megtennie, mint neked, így kiérsz, mielőtt ő odaérne.

9. Három kereskedő érkezett egy szállodába, s kényelmes szállást kértek a tulajdonostól, aki egy háromszobás lakosztályt ajánlott fel nekik 30 dollárért. A kereskedők felmentek, hogy megnézzék. Megfelelőnek találtak mindent, s így fejenként 10-10 dollárt összeadtak, és átnyújtották az őket felkísérő háziszolgának. Amikor a háziszolga átadta a tulajdonosnak a 30 dollárt, az akkor jött rá, hogy tévedett, hiszen a háromszobás lakosztály ára csak 25 dollár. Így a háziszolgával visszaküldött öt darab egydollárost. A háziszolga a lépcsőn felfelé menet arra gondolt, hogy nehéz volna az öt darab egydollárost három ember között szétosztani, s ezért kettőt zsebre vágott, a három kereskedőnek pedig 1-1 dollárt adott vissza. Így tehát végül mindegyik kereskedő adott tíz dollárt, de egyet visszakapott, így mindegyikük 9 dollárt fizetett. Ez 3 x 9 = 27 dollár; két dollár a háziszolga zsebében maradt, s ez eddig összesen 27 + 2 = 29 dollár, pedig eredetileg hárman 30 dollárt adtak össze. Hová tűnt a harmincadik dollár?

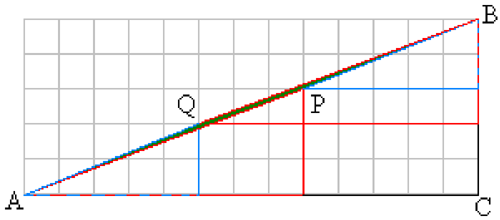
Megoldás: A kiadott 30 dollárból 25 volt a szoba ára, kettő pedig a háziszolga zsebében pihen – míg el nem költi... Ez pedig együtt 27 kifizetett dollár, amely a kereskedők összkiadása. A maradék 3 (azaz 1-1-1) dollár a kereskedők zsebében lapul, így megvan a 30, nincs semmi hiba! Mi a rossz akkor a fenti okoskodásban? Az, hogy a hotelszolga által ellopott két dollár már benne van a 27-ben, hiszen ez is a kereskedők kiadása volt, s újra beszámolja a feladat. A kereskedőknél levő 1-1-1 dollárról viszont a feladat okoskodása szót se ejt, pedig ezzel együtt van meg az eredeti 30 dollár.

10. Hogy lehet ez?
A mellékelt ábrán kétféle elrendezésben raktuk össze ugyanazon síkidomokat. Ugyanazoknak a daraboknak egyszer nagyobb, egyszer kisebb a területösszege!
Mi a nyitja a látszólagos ellentmondásnak?



Megoldás: Helyezzük egymásra a két ábrát! A nagy háromszög AB átfogójának meredeksége $\frac{5}{13} \approx 0{,}3846$, a piros háromszög átfogójának meredeksége $\frac{3}{8} = 0{,}375$, a kéké pedig $\frac{2}{5} = 0{,}4$. Ezek alapján tehát a három háromszög átfogója nem fedi egymást!

Helyezzük egymásra a két ábrát, így a nagy háromszög AB átfogója „alá" kerül az első ábra P pontja, míg „fölé" kerül a második ábra Q pontja. Így nyilvánvaló, hogy a két ábrán nem háromszögeket raktunk ki a darabokból, hanem először egy konkáv APBC, másodszor pedig egy konvex AQBC négyszöget. A két ábra egymásra helyezésével a hosszúkás AQBP paralelogramma keletkezik, amelynek területe éppen egy területegység. Ez alakul át tehát a „semmiből keletkező" kis négyzetté!



Feladatok:

M101: Egy asztalon kilenc külsőre teljesen egyforma biliárdgolyónk van. Azonban az egyik biliárdgolyó egy kicsit nehezebb, mint a többi nyolc.
Van egy kétkarú mérlegünk, melynek mindkét serpenyőjébe tehetünk pénzdarabokat. Két mérésből meg kell állapítani, hogy melyik a nehezebb biliárdgolyó. Hogyan csináljuk?

M102: Van tizenkét pénzdarabunk, melyek közül valamelyik hamis, azaz tömegében eltér a többitől, de nem tudjuk, hogy könnyebb vagy nehezebb azoknál. Van egy kétkarú mérlegünk, melynek mindkét serpenyőjébe tehetünk pénzdarabokat. Állapítsuk meg 3 méréssel, melyik a hamis pénzdarab!

M103: Van egy 36 emeletes épület és van 2 db ugyanolyan fajta tojásunk. Ha valamelyik emeletről kidobjuk valamelyik tojást, és túl magasról dobtuk, akkor összetörik, de ha nem elég magasról, akkor teljesen ép marad. Kísérletezhetünk: különböző emeletekről ejthetjük a tojásokat, hogy megvizsgáljuk, olyan magasról összetörik-e. Hogyan állapítjuk meg legkevesebb próbálkozásból, hogy pontosan hányadik emeletig marad ez a fajta tojás sértetlen, ha ledobjuk?

M104: Négy embernek egy rozoga hídon kell átmennie sötétben egy zseblámpa segítségével. Egyszerre csak ketten tudnak átmenni és lámpa nélkül nem, tehát csak a „ketten átmennek egy visszajön" módszer lehetséges. Az emberek maximális sebessége különböző, így rendre 1, 2, 5 és 10 perc alatt érnek át, ha egyedül vannak. (Két ember együtt a lassabbik sebességével halad.) Át tudnak menni mindnyájan 17 perc alatt?

M105: Húsz embert az alábbi kísérletre kérünk fel. Sorba állítjuk őket nagyság szerint, hátul a legmagasabb, elöl a legalacsonyabb. Mindenkinek a fejére teszünk egy sapkát, pirosat vagy kéket. A sorban állás olyan, hogy mindenki látja az előtte álló

összes személy sapkáját, de a sajátját és a mögötte állókét nem. Most a legmagasabbtól előre haladva mindenki megtippeli a saját sapkája színét. A résztvevők célja az, hogy minél többen találják el a helyes választ. A résztvevők tudják előre a feladatot, és megfelelő stratégiát beszélhetnek meg. Mi legyen ez a stratégia, hogy a lehető legmagasabb legyen a találati arány?

M106: Egy tutajosnak át kell szállítani a másik partra a káposztát, a kecskét és a farkast. Ügyelni kell arra, hogy a csónakban csak egyiküknek van hely, és ha a farkas egyedül marad a kecskével, akkor megeszi, s ugyanez történik, ha a kecske egyedül marad a káposztával – itt a kecske eszi meg a káposztát. Hogyan oldja meg a tutajos a feladatot?

M107: Egy vadász 10 km-t délre, 10 km-t nyugatra, 10 km-t északra ment, és ugyanoda jutott, mint ahonnan elindult. Hány oroszlánt lőhet még aznap?

M108: Három kannibál és három szerzetes áll a folyó egyik partján. Találnak egy üres kétszemélyes csónakot. Mindnyájuknak épségben át kell menni a folyón. Ha valamelyik parton többségbe kerülnek a kannibálok, akkor megeszik a szerzeteseket. Hogyan cselekedjenek?

M109: Egy 1 méter hosszú rúdra véletlenszerűen egyszerre 20 db hangyát ejtünk rá, melyek a rúdra érve rögtön elkezdenek mászni valamelyik irányban. Mindegyikük sebessége mindkét irányban 1 cm/sec. Ha két hangya összetalálkozik, akkor mindketten megfordulnak, s ellenkező irányba kezdenek mászni ugyanakkora sebességgel. Ha egy hangya eléri a rúd valamelyik végét, akkor lepottyan. Legfeljebb hány hangya lehet a rúdon a hangyák indulása után 100 másodperccel?

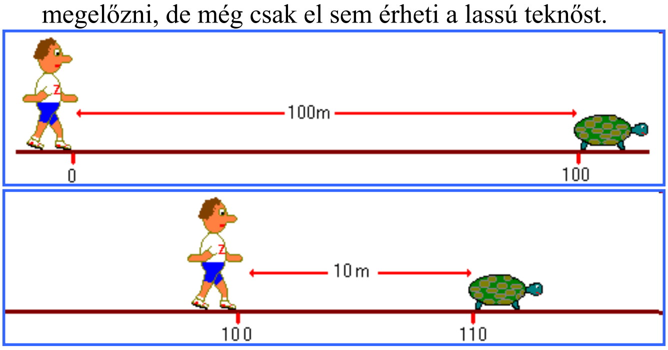
M110: Négy személy úszik a vízben, mindegyik mindegyiktől 5 méter távolságban. Az első személy egy hölgy, bikinit visel. A második személy is hölgy, rajta egyberészes fürdőruha van. A harmadik személy egy férfi, rajta fürdőnadrág van. Mit visel a negyedik személy?

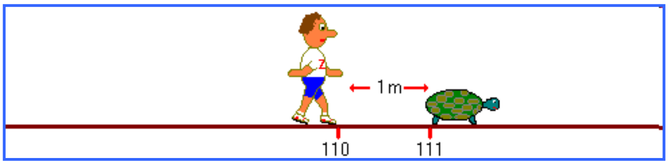
Végtelen történet

Hol van a végtelen? A fejünkben. Talán épp emiatt van, hogy főképp a matematika foglalkozik vele. A matematikán belül számos meghökkentő dolgot „produkál”, paradoxonok és meghökkentő eredmények termékeny táptalaja a végtelen. A matematikusok a XIX. század végén kezdtek behatóan foglalkozni vele. Georg Cantort, aki a végtelen meglepő tulajdonságait először mutatta meg, forradalmi gondolatai miatt jó ideig eretnekként kezelték korának matematikusai.
Barangoljunk egy kicsit a végtelen világában!

Eleai apóriák nyomában
Eleai Zénón, Zeno (Elea, i. e. 490 – i. e. 430) görög filozófus több végtelennel kapcsolatos paradoxont (azaz látszólagos vagy valódi logikai ellentmondást) fedezett fel. Ezek egyike azt állítja, hogy egy eldobott kő soha nem ér célba, a másik pedig, hogy Akhilleusz soha nem éri utol a teknősbékát:

1. Zénón nyolclábnyira áll egy fától, kezében egy követ tart. A követ a fa felé hajítja. Ahhoz, hogy a kő eltalálja a fát, először meg kell tennie a köztük lévő távolság, azaz a nyolc láb felét, ehhez pedig valamennyi időre van szüksége. Ezután még mindig hátra van négy láb, ennek megtételéhez pedig először ennek a felét, vagyis további két lábat kell repülnie, és ehhez ismét adott idő kell. Ezután további egy, majd fél, majd negyed lábat kell megtennie, és így tovább a végtelenségig. Zénón következtetése: a kő sohasem éri el a fát.
2. Akhilleusz, a gyorslábú görög hős versenyt fut egy teknőssel. Mivel igen gyors, száz láb előnyt ad a hüllőnek. Ahogy elindul a verseny, Akhilleusz pár ugrással ott terem, ahol a teknős „futni” kezdett. Ez alatt az idő alatt azonban a teknős is halad egy keveset, talán pár lábnyit. Akhilleusz egy újabb lépéssel ott terem, ám ezalatt a teknős ismét halad egy kicsit, és még mindig vezet. Akármilyen gyorsan ér is oda Akhilleusz, ahol a teknős egy pillanattal korábban volt, amaz mindig egy kicsit előbbre mászik ezalatt. Zénón érvelése azt látszik igazolni, hogy a gyors Akhilleusz sohasem fogja megelőzni, de még csak el sem érheti a lassú teknőst.





A matematika megtalálta a látszólagos paradoxonok feloldását (bár a paradoxon által felvetett filozófiai problémákra nem ad választ). A paradoxon ugyanis azt sugallja, hogy ha valami végtelen sokszor történik, akkor soha nincs vége, azaz hogy ha végtelen sok távolságot vagy időt kell összegeznünk, akkor ez megoldhatatlan, mert soha nem érhetünk a végére.
A matematikát tanulók már az általános iskolában találkoznak a probléma matematikai feloldásával, csak lehet, hogy nem ismerik fel. Amikor az 1/3 törtet tizedes törtbe átszámolják, s megállapítják, hogy ez egy végtelen szakaszos tizedes tört, akkor tulajdonképpen a $0{,}3333... = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + ...$ végtelen összegről beszélnek. A matematika tehát „átlép” a paradoxonon, s hogy a kő célba érjen, s hogy sebes lábú Akhilleusz utolérje a poroszkáló hüllőt, elfogadja, hogy végtelen sok véges mennyiség összege lehet véges – persze csak megfelelő esetekben. Ha végtelen sokszor adunk össze 1-et, az a matematikában sem ad véges eredményt... Ha elfogadjuk, hogy végtelen sok valós szám összege lehet egy valós szám, akkor az alapműveletek szabályai alapján matematikailag korrekt módon levezethetők a végtelen összegek műveleti szabályai, továbbá az is, hogy egy végtelen összegnek legfeljebb egyféle szám lehet az eredménye.
A végtelen sok tagból álló összeget a matematikában (végtelen) sornak nevezik, s így jelölik:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Milyen esetekben lehet véges egy sor összege? Nem egyszerű általánosan válaszolni. Íme, a legegyszerűbb feltétel: minden olyan **mértani** sorozat esetén véges a sor összege, ahol a q hányados (kvóciens) abszolútértéke 1-nél kisebb.
Egy okoskodást mutatok a $|q|<1$ feltételt teljesítő végtelen mértani sorok összegének meghatározására. (Itt fel fogom használni a végtelen összegek néhány fentebb említett műveleti szabályát, illetve azt, hogy létezik az összegük.) Jelölje S az összes (végtelen sok) elem összegét!

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + ... = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + + a_1 q^3 + a_1 q^4 + a_1 q^5 + ...$$

Szorozzuk meg ezt az egyenlőséget mindkét oldalon q-val:

$$qS = qa_1 + qa_2 + qa_3 + qa_4 + qa_5 + qa_6 + ... = a_1 q + a_1 q^2 + + a_1 q^3 + a_1 q^4 + a_1 q^5 + a_1 q^6 + ...$$

Megfigyelhető, hogy az első végtelen összeg jobb oldalában szerepel a második végtelen összeg jobb oldala. Helyettesítsünk be ennek megfelelően az első egyenlet jobb oldalába, majd fejezzük ki S-et a kapott egyenlőségből!

$$S = a_1 + qS$$

$$S(1-q) = a_1$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Az utolsó sor tehát a végtelen összeg kiszámításának képlete. Ellenőrizzük le a 0,33333... esetére! Itt az első elem 0,3 és a kvóciens 0,1:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,3}{1-0,1} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}$$

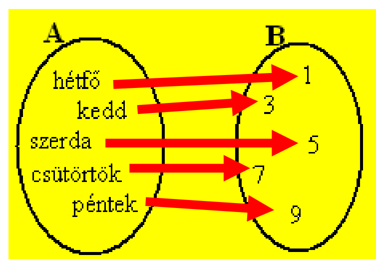
A képlet tehát alkalmazható végtelen szakaszos tizedestörtek kiszámítására.

Cantor „paradicsoma"

Georg Cantor német matematikus 1874-ben a *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik* című folyóiratában publikált egy cikket, amely halmazok számosságával, s ennek kapcsán magával a végtelennel foglalkozik. A forradalmi cikk előtt a matematikusok nemigen gondoltak arra, hogy végtelen halmazok elemeit lehetséges volna értelmesen megszámolni, illetve a „végtelen sok" elemű halmazoknak különböző „elemszámuk" lehet. Cantor módszert talált végtelen halmazok „összemérésére", megadta, hogy két végtelen halmazt mikor tekinthetünk különböző és mikor azonos „méretűnek", számosságúnak, s igazolta, hogy van legalább kétféle végtelen számosság.

E részben áttekintjük Cantor néhány lényeges gondolatát, ám megismerésükhöz néhány alapvető fogalom tisztázása szükséges. Mindössze annyit kellene világosan látni, hogy mit jelentenek a természetes számok, mit is csinálunk *pontosan*, amikor megszámolunk valahány dolgot. A matematikában a megszámlálandó dolgokat *halmaz*okba tesszük, így kezeljük, s a megszámolás végeredményét a halmaz *számosság*ának nevezzük. (A mindennapi élet számolási feladatainál az eredmény mindig egy természetes számmal is kifejezhető.)

Hogy ugyanannyi huszár van-e a kaszárnyaudvaron, mint ahány ló, azt könnyen eldönthetjük, ha kiadjuk a parancsot: „Lóra!" , majd megnézzük, maradt-e gyalogos huszár vagy huszár nélküli ló.



Két halmaz elemeinek száma, azaz számossága egyenlő, ha létezik köztük kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, azaz „párba állítás" (szakkifejezéssel: bijekció).

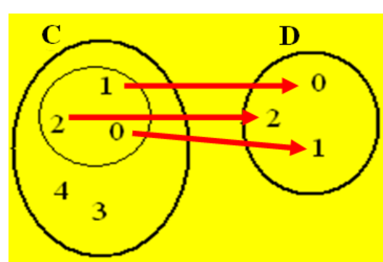
Például: A= {hétfő; kedd; szerda; csütörtök; péntek}
B= {1;3;5;7;9}

E két halmaznak „ugyanannyi" eleme van. Ennek matematikai jelölése: |A| = |B|

Ha létezik bijekció egy ismeretlen számosságú „H" halmaz és egy olyan halmaz között, amelyről már tudjuk, hogy öt eleme van, akkor azt mondjuk, hogy H számossága is öt. Jelölés: |H|=5.

Van-e olyan halmaz, amelynek számossága 5 és mindig kéznél van, hogy párba állítsuk vele a még ismeretlen számosságú halmazok elemeit? Igen! Íme: K={hüvelykujj; mutatóujj; nagyujj; gyűrűsujj; kisujj}: ez egy természetes módon adódó halmaz a számosság megállapításához, s amikor ujjainkon megszámolunk valamit, valóban e halmazt használjuk a „párba állításhoz".

A számosság fontos tulajdonságai: Ha két halmazra |A|=|B|, akkor |B|=|A|. Ha három halmaz esetén: |A|=|B| és |B|=|C|, akkor |A|=|C|. Mindig igaz továbbá |A|=|A| is.



Végesnek nevezünk egy halmazt, ha egy elemet hozzávéve számossága megváltozik.

Véges halmaznak nevezzük azokat a halmazokat, amelyeknek számossága leírható valamely természetes számmal.

Két nem egyenlő számosságú halmaz közül az a nagyobb számosságú, amelynek van a másikkal azonos számosságú valódi részhalmaza. Például az ábrán |C|>|D|, mert nincs közöttük bijekció, de C egyik valódi részhalmazának esetére van bijekció.
Cantor ötlete az volt, hogy végtelen halmazok között is lehet bijekció, s ekkor ez azonos számosságot jelent.
Megtoldanánk ezt azzal a tétellel, hogy ha A és B végtelen halmaz esetén A és B egy részhalmaza közt, illetve A és B egy részhalmaza közt is van bijekció, akkor A és B számossága egyenlő.
Két végtelen halmaz közül A számossága nagyobb B számosságánál, ha nem létezik köztük bijekció, de A egy részhalmaza és B között már létezik.

Példa: A= {1; 2 ; 3; 4; 5; 6; … } és B= {-1; -2; -3; -4; -5; -6; … }

x	1	2	3	4	5	6	7	8	. . .
f(*x*)	–1	–2	–3	–4	–5	–6	–7	–8	. . .

Bijekció: $f(x) = -x$ Emiatt |A|=|B|

Más példák, kérdések: Van-e bijekció **N** és a következő halmazok között?

- *A*= **N**\{0} = {1; 2; 3; 4; 5; 6; …}
- *B*= {páros természetes számok} = {0; 2; 4; 6; …}
- *C*= {a 10 pozitív egész kitevőjű hatványai} = {10; 100; 1000; 10000; …}

N:	*x*	0	1	2	3	4	5	. . .
A:	$f_1(x)=x+1$	1	2	3	4	5	6	. . .
B:	$f_2(x)=2x$	0	2	4	6	8	10	. . .
C:	$f_3(x)=10^{x+1}$	10	100	1000	10000	100000	1000000	. . .

Válasz: Igen, a táblázatban látható a három bijekció, amelyek alapján mindhárom halmaz ugyanolyan számosságú, mint **N**.
N számosságának jele: $\aleph_0$ (alef-null). Neve: *megszámlálhatóan végtelen* számosság.
Megállapítható, hogy az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú.
Az állítást az alábbi táblázat igazolja.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	. . .
f(*x*)	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	. . .

Az eddigieket összefoglalva: megszámlálhatóan végtelen számosság szemléletesen azt jelenti, hogy egy halmaz elemeit be tudjuk sorszámozni a természetes számokkal.
Két meglepő állítás:

1. A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú.
2. A valós számok halmaza *nem* megszámlálhatóan végtelen számosságú. Számosságának jele: $\aleph_1$ (alef-egy), a neve pedig: kontinuum-számosság.

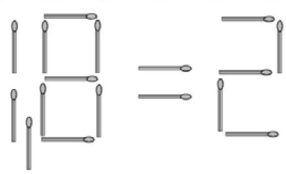
E két bizonyítás nehezebb az eddigieknél, ezért külön dokumentumban, a honlapon olvashatók.
A kontinuum-számosság nagyobb, mint a megszámlálhatóan végtelen számosság, mivel a valós számok halmaza részhalmazként tartalmazza a természetes számok halmazát, tehát számossága sem kisebb, sem egyenlő nem lehet a megszámlálható számossággal.

Megemlítjük, hogy bármely intervallum, sőt a sík és a tér is kontinuum-számosságú halmaz.
Sok fejtörést adott a matematikusoknak, hogy létezik-e olyan halmaz, amely $\aleph_0$ -nál nagyobb, de $\aleph_1$-nél kisebb számosságú. Ezt a sokáig megoldatlan problémát kontinuum-hipotézisnek nevezik. Ma már tudjuk, hogy a kontinuum-hipotézis nem dönthető el a korábbi ismeretek felhasználásával, nem okoz ellentmondást, ha igaznak tekintjük, de az sem, ha hamisnak vesszük.
Cantor elmélete számos bizonyítást leegyszerűsített, új lendületet adott régi problémák igazolásához.
<u>Csak egy példa erre:</u> Felvetődik a kérdés, hogy minden irracionális szám felírható-e racionális számokból kiindulva, a négy alapművelet és gyökvonások véges sokszori alkalmazásával. Igazolható, hogy az ilyen alakban előállítható számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, míg az irracionális számok halmaza kontinuum számosságú. Tehát kell lennie olyan irracionális számnak (mégpedig kontinuum-végtelen soknak), mely nem írható fel a megadott alakban – megválaszoltuk a kérdést!

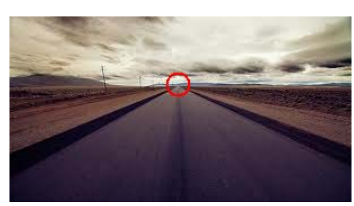
⌘

Cantor életművét Hilbert az 1900-as nemzetközi matematikus kongresszuson a következő mondattal méltatta:
„Senki sem űzhet ki minket abból a paradicsomból, melyet Cantor teremtett nekünk.”

Kapcsolódó feladatok:
M111a: Ellenőrizzük le a képlet segítségével az 1/7 tizedestört alakjának helyességét!
M111b: Írjuk fel a képlet segítségével a $0,\overline{231}$ **végtelen szakaszos tizedestörtet két egész hányadosaként!**
M112: Igazoljuk a képlet segítségével, hogy egy irracionális szám nem lehet végtelen szakaszos tizedestört!
M113: Az 592-nek többszöröse a 9990000. Igazoljuk a képlet segítségével, hogy minden egész számnak van olyan többszöröse, amely 9-es számjegyekkel kezdődik, 0 számjegyekre végződik, s ezeken kívül nem tartalmaz más számjegyet!
M1114: Helyezzünk át egy gyufaszálat, hogy igaz egyenlőséget kapjunk!



M115: Adjunk meg egy bijekciót a]0;3[intervallum és a valós számok halmaza között!
M116: Igazoljuk, hogy egy négyzet pontjainak számossága kontinuum-számosság!
M117: Létezik-e olyan valós számok halmazán értelmezett függvény, mely minden intervallumban minden valós értéket felvesz?
M118: Adjunk meg olyan korlátos halmazt (egy megfelelő kör belsejében „elférő” halmazt), amely egybevágó valamely valódi részhalmazával!
M119: Végezzünk kis kutatást a Cantor-elmélettel kapcsolatban: mi a Grand-Hotel-paradoxon? Cantor elméletének mely része és hogyan ad választ a paradoxonra?



M120: A 4. munkalap arról szól, hogyan alkothatunk síkbeli képet centrális projekció segítségével térbeli ponthalmazokról. Válaszoljuk meg ennek segítségével, hogy lehet, hogy a fényképeken „a végtelen megjelenik” (pl.: egyenes országút két szélének találkozási pontja)? Mi a feltétele annak, hogy megjelenjen egy fényképen?
(A mellékelt ábrán pirossal van bekarikázva a „lefotózott végtelen”.)
(Külön nem jeleztem, de a szövegben néhány adat és megállapítás a wikipédia megfelelő oldalairól származik.)

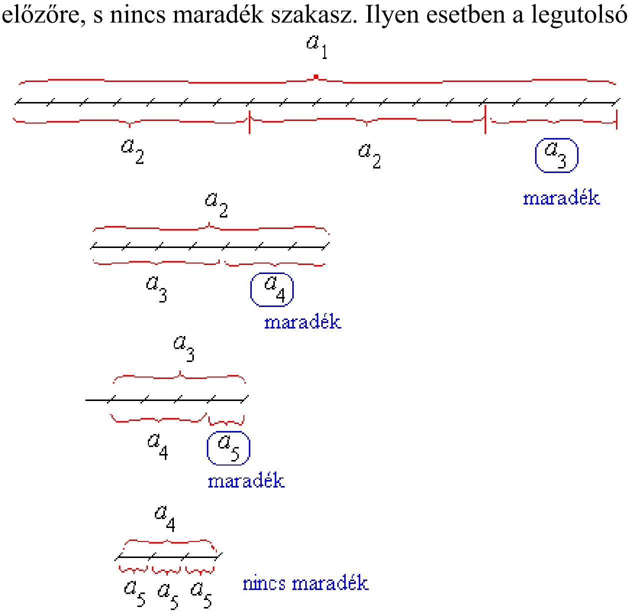
A gyökök világa

Ez a munkalap olyan témakörökkel, olyan feladatokkal, matematikai érdekességekkel foglalkozik, amelyek mindegyike gyökökkel, gyökvonással kapcsolatos.

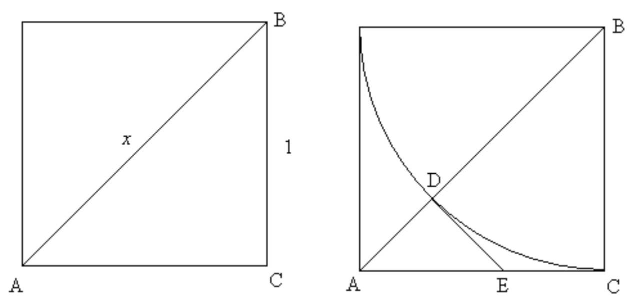
Lánctörtek

a) Az ókori görög matematika egy problémája volt két adott szakasz közös mértékének meghatározása. Ez a közös mérték egy olyan szakasz, amely mindkét szakaszra pontosan egész számszor mérhető fel. A közös mérték meghatározása céljából két adott a_1 és egy nála kisebb a_2 szakasszal a következő műveletsorozatot végezték el:

Felmérték az a_2 szakaszt az a_1 szakaszra, ahányszor csak ráfért. A maradék szakaszt (nevezzük a_3-nak), rámérjük az előzőre (a_2-re), ahányszor csak ráfér. Utána a maradék szakaszt (nevezzük a_4-nek), rámérjük az előzőre (a_3-ra), ahányszor csak ráfér stb. ezt az eljárást addig ismételgetjük, míg egyszer a rövidebbik szakasz éppen valahányszor ráfér az előzőre, s nincs maradék szakasz. Ilyen esetben a legutolsó felmért szakasz a közös mérték.



Az ábrán az a_5 szakasz lett a közös mérték. De néha sokáig tart ez a „ráméregetés". Próbáljuk meg egy egységnyi oldalú négyzet átlóját összemérni a négyzet oldalával!



Az AB átlót x jelöli. Mérjük (körözzük) rá B-től kezdve a BC=1 távolságot! A maradék az AD szakasz lesz. Mivel BAC szög 45º-os, így AED háromszög egyenlő szárú, azaz AD=DE.
E pontból a berajzolt körívhez húzott két érintőszakasz egyenlő, azaz DE=EC. A következő összemérésnél AC-t (=BC-t) és DA-t (=EC-t) kell összemérni. DA(=EC) kétszer fér rá AC-re, de első felmérés után AE és EC(=AD) további vizsgálata újra egy négyzet oldalának és átlójának összehasonlítása lesz, ami ugyanaz a probléma, mint az elején! Tehát újra meg újra elvégezhetjük ugyanazokat a lépéseket, s mindig ugyanolyan összehasonlítást kell végezni, csak egy kisebb ábrán. Ezek szerint a négyzet oldalának és átlójának nincs közös mértéke! Az ilyen szakaszokat összemérhetetlen szakaszoknak nevezzük. (A hagyomány szerint amikor az ókorban a görög püthagoreusok felfedezték, hogy léteznek nem összemérhető szakaszok, úgy érezték, hogy ez beárnyékolja a matematika szépségét, s próbálták titokban tartani felfedezésüket.)
Nem nehéz belátni, hogy két szakasz pontosan akkor összemérhető, ha az arányuk racionális szám. Miután Pitagorasz tételéből következik, hogy a fenti x szakasz hossza $\sqrt{2}$, ezért azt igazoltuk, hogy a $\sqrt{2}$ nem racionális szám.

A fenti ábrán a szakaszok felmérése a következő egyenlőségeket adja: $\frac{AE}{EC}=\frac{x}{1}$, azaz $x=\frac{AE}{EC}=\frac{AE}{AD}=\frac{1-(x-1)}{x-1}=\frac{1}{x-1}-1$. Adjunk mindkét oldalhoz 1-et: $x+1=\frac{1}{x-1}$

Vegyük mindkét (nem 0) oldal reciprokát: $\frac{1}{x+1}=x-1$, majd adjunk mindkét oldalhoz 2-t:

$2+\frac{1}{x+1}=x+1$ Jelöljük az x+1-et a-val:

$$a=2+\frac{1}{a} \qquad (*)$$

Vegyük észre, hogy a (*) jelzésű egyenletbe behelyettesíthetjük önmagát az a helyére. Így olyan egyenletet kapunk, amely ismét igaz lesz a-ra: $a=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{a}}$. Ezt ismételgetve kapható, hogy a megoldása végtelen sok hasonló egyenletnek, mely ilyen alakú:

$$a=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ldots}}}}$$

Fentebbiek miatt $a=1+\sqrt{2}$.

b) Tekintsük a következő egyenletet:

$$x=1+\frac{1}{x} \qquad (**)$$

Ha x-szel beszorozzuk, akkor a következő másodfokú egyenletet kapjuk: $x^2-x-1=0$

A két kapott gyök: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. (Az első közülük az aranymetszés egyik száma – erről volt már szó a 3. munkalapon.) Válasszuk ki a pozitív gyököt, s nevezzük *w*-nek! Most szeretnénk csak erről beszélni.
Vegyük észre, hogy a (**) jelzésű egyenletbe behelyettesíthetjük önmagát az *x* helyére. Így olyan egyenletet kapunk, amely ismét igaz lesz *w*-re: $x=1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. Ezt ismételgetve kapható, hogy *w* megoldása végtelen sok hasonló egyenletnek, mely ilyen alakú:

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}$$

Tekintsük a következő emeletes törtek értékét:

$$a_1=1 \quad ; \quad a_2=1+\frac{1}{1} \quad ; \quad a_3=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} \quad ; \quad a_4=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} \; ; \dots$$

Számológéppel vagy akár az Excel segítségével azt kapjuk, hogy a kapott sorozat egyre jobban megközelíti az $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ értékét!

c) Vessük össze a) és a b) pontnál kapott eredményt! Egy-egy $a+\sqrt{b}$ $(a;b\in\mathbf{Z})$ alakú számot írtunk fel $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\dots}}}$ alakban.

Az ilyen alakú felírást lánctörtnek nevezzük, és $[a_1;\, a_2;\, a_3;\, \dots]$ jelöléssel jelöljük. Így pl.: $1+\sqrt{2}=[2;\,2;\,2;\,2;\dots]$ és $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=[1;\,1;\,1;\,1;\,1;\dots]$

Azt vehettük észre, hogy a két szám lánctört alakja periodikus. Ismert számelméleti tétel, hogy a **racionális számok** mind **véges lánctörtek.**

Például: $\frac{43}{19}=[2;\,3;\,1;\,4]=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}$

Egy másik tétel szerint a **periodikus lánctörtek** pedig azonosak a másodfokú algebrai számokkal, azaz azokkal, amelyek **egész együtthatójú másodfokú egyenletek gyökei** lehetnek.

Például az $\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{61}}{6}$ szám gyöke a $2x^2-3x-3=0$ egyenletnek, s $\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{61}}{6}=[1;2;7;2;2;7;2;2;7;;2;....]=[[1][2;7;2]]$

d) Nemcsak a racionális és másodfokú algebrai számok, hanem bármely x pozitív szám lánctört alakját megkaphatjuk, ha a szám egész részét felírjuk egy papírra, majd a törtrészének a reciprokát vesszük, majd ennek az egész részét ismét felírjuk, s a törtrészének reciprokát vesszük stb. Ha ezt az eljárást ismételgetjük a papírra sorban felírt számok adják az x szám lánctört alakjának elemeit.

Szám	Lánctört-jegyek
7/19	0
2,714286	2
1,4	1
2,5	2
2	1
1	1
1,41E+14	1,40737E+14
########	#ZÉRÓOSZTÓ!
########	#ZÉRÓOSZTÓ!

Ezen eljárás alapján készíthetünk olyan Excel táblarészt, mely kiszámolja egy adott szám lánctört alakját, csak az a gond, hogy az Excel számábrázolási pontossága miatt a legtávolabbi jegyek pontatlanok lesznek. Racionális számokkal kipróbálva azt kapjuk, hogy az Excel egyik lánctörtjegy után 0-t kellene hogy kapjunk, de az Excel tárolási pontatlansága miatt a következő látható:

M121: Az iménti eljárás alapján készítsünk olyan Excel táblarészt, amely tíz jegyig kiszámolja egy szám lánctört alakját! Egy egésztől való 10^{-7} mértékű eltérést tekintsünk 0-nak! (Ha egy adat nem értelmes, a helyén álljon 0.)

M122: Az iménti eljárás alapján készítsünk olyan Excel táblarészt, amely kiszámolja egy legfeljebb 20 jegyű lánctört értékét! (Ha egy adat nem értelmes, a helyén álljon 0.)

M123: A szakaszok összemérésének eljárása alapján készítsünk olyan Excel táblarészt, amely kiszámolja egy számlálóval és nevezővel megadott racionális szám lánctört alakját! (Ha egy adat nem értelmes, a helyén álljon 0.)

M124: Egy másodfokú algebrai szám periodikus lánctört alakja: [4;1;1;10;2;10;2;10;2;10;2;...]= [[4;1;1]; [10;2]]. Mi a szám?

M125: Egy háromjegyű egész szám négyzetgyökének egész részét nem ismerjük, de a tizedesvessző utáni jegyei ezek: ...,49358869 („Excel pontosság"). Mely egész szám négyzetgyökéről lehet szó?

Trükkös hatványok

Figyeljük meg a következő négyzetre emelést:

$\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2=7+2\sqrt{3}\sqrt{7}+3=10+2\sqrt{21}$

Aki csak a végeredményt látja, nem gondol rá, hogy egy $a+\sqrt{b}$ ($a;b\in\mathbf{Z}$) alakú kifejezés négyzete. Pedig az! Ezzel a módszerrel lehet több nehéznek tűnő feladatot egyszerűen megoldani, például a következőt is:

Számítsuk ki x pontos értékét: $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

Megoldás: $x=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}=\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}+2\right)=3$

Hasonlóképpen pl.: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^3 = 2\sqrt{2}+3\cdot 2\cdot\sqrt{5}+3\cdot 5\cdot\sqrt{2}+5\sqrt{5} = 17\sqrt{2}+11\sqrt{5}$
Ilyen alakban aztán nehéz felismerni a teljes köböt...
Végül egy igen nehéznek tűnő feladat: határozzuk meg az alábbi x szám tizedesvessző utáni századik számjegyét!

$x=\left(6+\sqrt{35}\right)^{100}$

A megoldás kulcsa, hogy nem ezt a kifejezést vizsgáljuk, hanem a (bonyolultabbnak tűnő) $z=x+y=\left(6+\sqrt{35}\right)^{100}+\left(6-\sqrt{35}\right)^{100}$ kifejezést.
A binomiális tétel alapján:

$$x=\left(6+\sqrt{35}\right)^{100}=\binom{100}{0}\cdot 6^{100}+\binom{100}{1}\cdot 6^{99}\cdot\left(\sqrt{35}\right)+\binom{100}{2}\cdot 6^{98}\cdot\left(\sqrt{35}\right)^2+\binom{100}{3}\cdot 6^{97}\cdot\left(\sqrt{35}\right)^3+\ldots$$
$$\ldots+\binom{100}{99}\cdot 6\cdot\left(\sqrt{35}\right)^{99}+\binom{100}{100}\cdot\left(\sqrt{35}\right)^{100}$$

$$y=\left(6+(-\sqrt{35})\right)^{100}=\binom{100}{0}\cdot 6^{100}+\binom{100}{1}\cdot 6^{99}\cdot\left(-\sqrt{35}\right)+\binom{100}{2}\cdot 6^{98}\cdot\left(-\sqrt{35}\right)^2+\binom{100}{3}\cdot 6^{97}\cdot\left(-\sqrt{35}\right)^3+$$
$$+\ldots+\binom{100}{99}\cdot 6\cdot\left(-\sqrt{35}\right)^{99}+\binom{100}{100}\cdot\left(-\sqrt{35}\right)^{100}=\binom{100}{0}\cdot 6^{100}-\binom{100}{1}\cdot 6^{99}\cdot\sqrt{35}+\binom{100}{2}\cdot 6^{98}\cdot\left(\sqrt{35}\right)^2-$$
$$-\binom{100}{3}\cdot 6^{97}\cdot\left(\sqrt{35}\right)^3+\ldots-\binom{100}{99}\cdot 6\cdot\left(\sqrt{35}\right)^{99}+\binom{100}{100}\cdot\left(\sqrt{35}\right)^{100}$$

Megfigyelhető, hogy a két kifejezés páratlan sorszámú tagjai azonosak. A páros sorszámú tagok egymás ellentettjei, így az $x+y$ összegben kiesnek (algebrai összegük nulla). A páratlan sorszámú tagok három tényezőből állnak: egy binomiális együttható, ami egész szám, a 6-nak egy hatványa, ami szintén egész, majd a $\sqrt{35}$-nek egy **páros kitevőjű** hatványa, ez épp a 35-nek pozitív egész kitevős hatványa, tehát ez is egész. Így az $x+y$ összeg csupa egész számok összege, tehát $z=x+y$ egész szám.
Írjuk fel a $\left(6-\sqrt{35}\right)$ szám közelítő értékét! Látható, hogy $0<\left(6-\sqrt{35}\right)\approx 0{,}08392<0{,}1$.
Emiatt $0<y=\left(6-\sqrt{35}\right)^{100}<0{,}1^{100}=0{,}000....001$, ahol az utolsó szám a tizedesvessző után 99 darab nullát tartalmaz. Ebből x-re a következőket írhatjuk fel: $z-0{,}1^{100}<x=z-y<z$.
Az imént elmondottak miatt az egyenlőtlenség bal oldalán egy olyan szám áll, amely a tizedesvessző után 100 darab kilences számjegyet tartalmaz. A jobb oldalon az ezt követő egész látható, vagyis x tizedestört alakja a tizedesvessző után legalább 100 darab 9-est kell, hogy tartalmazzon. Tehát az x szám tizedesvessző utáni századik számjegye egy 9-es.

M126: Számítsuk ki x pontos értékét: $x=\sqrt{29+6\sqrt{5}-6\sqrt{15}-10\sqrt{3}}+\sqrt{20-10\sqrt{3}}$

M127: Számítsuk ki y pontos értékét:

$y=\sqrt[3]{124-53\sqrt{5}}+\sqrt[3]{632-197\sqrt{5}}+\sqrt[3]{763+334\sqrt{5}}$

M128: Igazoljuk, hogy a Fibonacci-sorozat (3. munkalap) következő zárt alakjára teljesül, hogy minden eleme az előző kettő összege!

$$F_n=\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\cdot 2^n}$$

M129: Igazoljuk, hogy a Fibonacci-sorozat imént leírt zárt alakjára teljesül, hogy minden eleme egész!

M130: Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{2x+7}=\frac{x^2-7}{2}$$

Transzformációs szerkesztések

Mostanában kevés szó esik a geometriai szerkesztésekről, ritkán találkozunk szerkesztési feladatokkal. Az új típusú középiskolai érettségikben eddig még egyáltalán nem szerepelt szerkesztési feladat. Mondhatni, méltatlanul, mivel e feladatok összefüggések ismeretét, gyakran szellemes ötleteket feltételeznek, teljesebbé teszik a geometriai tudást.

E munkalap főképp szerkesztési feladatokkal foglalkozik, melyeket valamely – vagy akár több – geometriai transzformáció alkalmazásával lehet megoldani. A szerkesztési feladatok koordináta-geometriai feladatokként is megjelenhetnek, ám a lényegük ugyanaz...

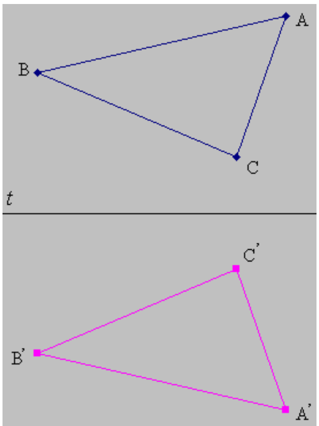
Transzformációk és tulajdonságok

Először olyan fogalmakat és alapvető állításokat ismertetünk, amelyek az utána következő többi rész megértését segítik.

Geometriai transzformáció: Olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz. Úgy adunk meg egy geometriai transzformációt, hogy az értelmezési tartománya minden pontjához megmondjuk, hogy mit rendel a transzformáció.

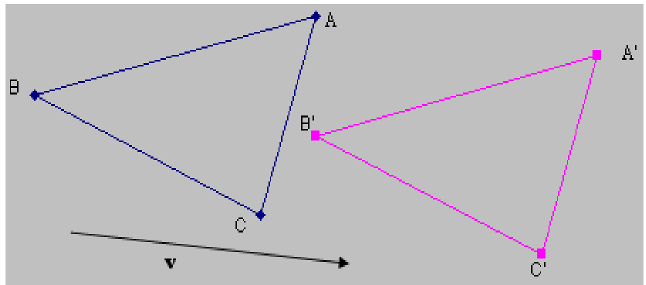
A transzformációk szemléltetésére nincs olyan jó módszer, mint a valós függvények esetén a koordináta-rendszerben megrajzolt grafikon. Egy transzformációt úgy szemléltetünk, hogy minden pont képe az eredetivel azonos betűjelű, de egy ’ (vessző) áll a betűjel mögött. Pédául P pont képét P’-vel jelöljük. A most következő transzformációk mind síkbeliek, azaz értelmezési tartományuk a sík pontjainak halmaza.

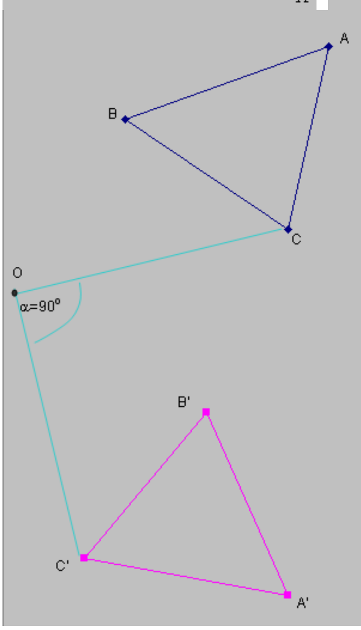
1. Tengelyes tükrözés: Legyen *t* egy egyenes a síkon (neve: tengely). Rendeljük hozzá *t* minden pontjához önmagát, a sík többi P pontjához pedig azt a P’ pontot, amelyre igaz, hogy a PP’ szakasz felezőmerőlegese *t*.
2. Eltolás: Legyen v egy síkbeli vektor. A sík minden P pontjához rendeljük hozzá azt a P’ pontot, melyre teljesül, hogy $\overrightarrow{PP'}=\mathbf{v}$.
3. Pont körüli forgatás: Legyen O egy adott síkbeli pont és α egy adott forgásszög. Rendeljük hozzá O-hoz önmagát, a sík többi P pontjához pedig azt a P’ pontot, melyre teljesül, hogy OP=OP’ és POP’forgásszög=α.
4. Középpontos tükrözés: Ha egy pont körüli forgatás szöge $180^\circ+k\cdot360^\circ$ (ha $k\in Z$), akkor a transzformációt középpontos tükrözésnek nevezzük.



←tengelyes tükrözés

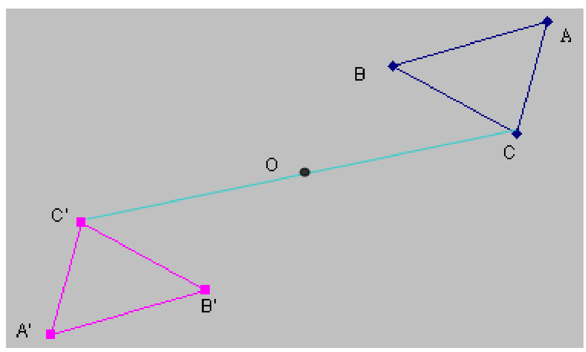
eltolás ↓





← forgatás 90°-kal

középpontos tükrözés ↓



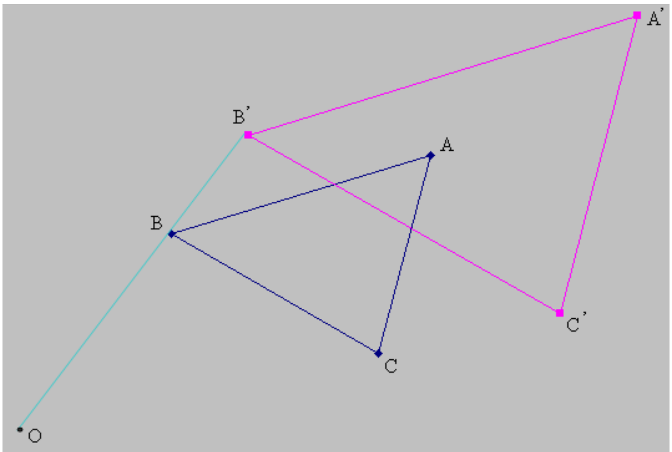
5. <u>Középpontos hasonlóság:</u> Legyen O egy adott síkbeli pont és λ egy nem 0 valós szám. Rendeljük hozzá O-hoz önmagát, a sík többi P pontjához pedig azt a P' pontot, melyre teljesül, hogy:

- P, O, P' pontok egy egyenesre esnek
- $\frac{OP'}{OP} = |\lambda|$
- Ha λ>0, akkor O nincs rajta a PP' szakaszon, λ<0 esetén O rajta van a PP' szakaszon.

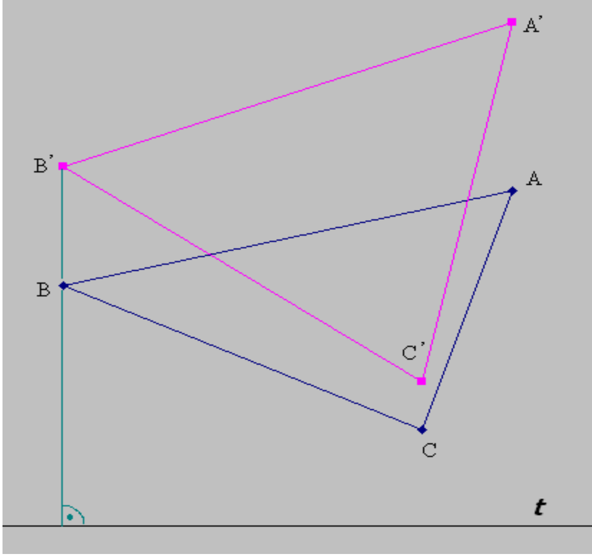
6. <u>Merőleges affinitás:</u> Legyen adott egy *t* síkbeli egyenes és egy λ nem 0 valós szám. Rendeljük hozzá *t* pontjaihoz önmagukat, a sík többi P pontjához pedig azt a P' pontot, melyre teljesül, hogy:

- PP' szakasz merőleges *t*-re.
- $\frac{\overline{P't}}{\overline{Pt}} = |\lambda|$

- Ha λ>0, akkor PP’ szakasznak nincs *t*-vel közös pontja , λ<0 esetén PP’ szakasznak van *t*-vel közös pontja



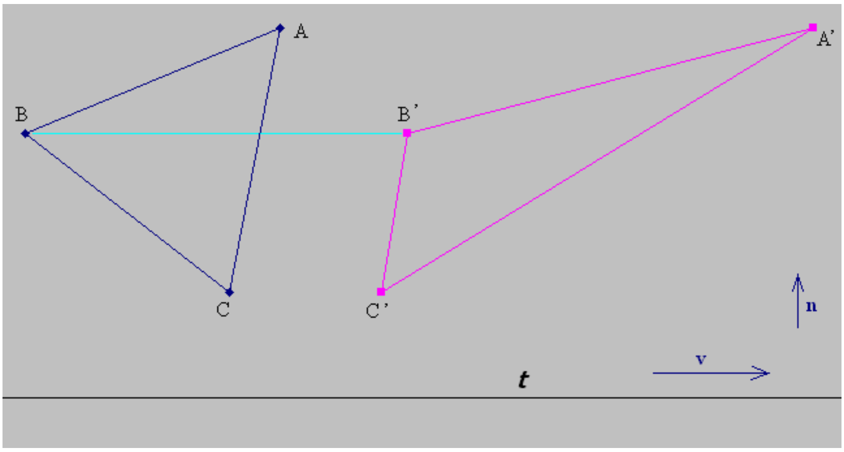
↑ középpontos hasonlóság λ=1,5



← Merőleges affinitás, λ=1,5

7. <u>Nyírás (párhuzamos affinitás):</u> Legyen adott egy síkbeli **irányított** *t* egyenes, annak egy irány- és egy normálvektora, és egy λ>0 valós szám. Rendeljük hozzá *t* pontjaihoz önmagukat, a sík többi P pontjához pedig azt a P’ pontot, melyre teljesül:

- PP’ szakasz párhuzamos *t*-vel.
- $\dfrac{\overline{P'P}}{\overline{Pt}} = \lambda$
- Ha P pont *t*-nek a normálvektor irányába eső félsíkjában van, akkor $\overrightarrow{PP'}$ egyirányú az irányvektorral, ha P pont *t*-nek a normálvektor irányával ellentétes félsíkjában van, akkor $\overrightarrow{PP'}$ ellentétes irányú az irányvektorral.



← nyírás
λ=1,5

A transzformációk tulajdonságai

Tengelyes tükrözés: egyenestartó, szögtartó, aránytartó, távolságtartó, körüljárást fordító. Fixpontok a tengely pontjai, fixegyenesek a tengelyre merőleges egyenesek és a tengely. Egy nem fix egyenes és képe a tengelyen metszi egymást.

Eltolás: egyenestartó, szögtartó, aránytartó, távolságtartó, iránytartó, körüljárástartó. Fixpont nincs, fixegyenesek a **v**-vel párhuzamos egyenesek. A nem fix egyenesek párhuzamosak a képükkel.

Pont körüli forgatás: egyenestartó, szögtartó, aránytartó, távolságtartó, körüljárástartó. Fixpont az O pont, és ha nem középpontos tükrözés, akkor fixegyenese nincs. Minden egyenes α szöget zár be a képével és O-ban metszik egymást.

Középpontos tükrözés: egyenestartó, szögtartó, aránytartó, távolságtartó, körüljárástartó. Fixpont az O pont, fixegyenesek az O-n áthaladó egyenesek. A nem fix egyenesek párhuzamosak a képükkel. Egy vektor és képe ellentettjei egymásnak.

Középpontos hasonlóság: egyenestartó, szögtartó, aránytartó, körüljárástartó. Fixpont az O pont, ha $\lambda \neq 1$, akkor fixegyenesek az O-n áthaladó egyenesek. $\lambda = 1$ esetén helybenhagyás (identitás), $\lambda = -1$ esetén egy középpontos tükrözés. Minden egyenes párhuzamos a képével. A vektorokat a λ-szorosukba viszi. Minden szakasz képének hossza $|\lambda|$-szerese a szakasz hosszának.

Merőleges affinitás: egyenestartó, $\lambda>1$ esetén körüljárástartó, $\lambda<1$ esetén körüljárást fordító. Ha $\lambda \neq 1$, akkor nem szögtartó és nem aránytartó. $\lambda = 1$ esetén helybenhagyás (identitás), $\lambda = -1$ esetén pedig tengelyes tükrözés. Fixpontok a tengely pontjai, fixegyenesek a tengelyre merőleges egyenesek és a tengely. Egy nem fix és tengellyel nem párhuzamos egyenes és képe a tengelyen metszi egymást. Egymással párhuzamos szakaszok és képeik aránya egyenlő. Minden kör képe ellipszis, melynek egyik tengelye párhuzamos az affinitási tengellyel, hossza az eredeti kör átmérője a másik tengely pedig annak $|\lambda|$-szerese.

Nyírás: egyenestartó, körüljárástartó Nem szögtartó és nem aránytartó. Fixpontok a tengely pontjai, fixegyenesek a tengellyel párhuzamos egyenesek és a tengely. Egy nem fix egyenes és képe a tengelyen metszi egymást. Egymással párhuzamos szakaszok és képeik aránya egyenlő. Minden kör képe ellipszis.

M131: Készíts olyan Excel táblázatot, amely a fentebbi ábrákat diagramként elkészíti!
A t tengely mindenütt az x tengely, az O pont az origó és α=90°. Viszont az eredeti háromszög, a λ és a v változtatható! Mintaként itt a készítendő táblázat fényképe:

Eredeti háromszög		Tengelyes tükrözés		Eltolás		Elforgatás		Középpontos tükrözés		Középpontos hasonlósá		Merőleges affinitás		Merőleges affinitás	
		t=	x tengely	**v**(5;2)		alfa=	90	O=origó		O=origó		t=	x tengely	t=	x tengely
				5	-1	O=origó				lambda=	1,5	lambda=	1,5	lambda=	1,5
x	y	x'	y'	x'	y'	x'	y'	x'	y'	x'	y'	x'	y'	x'	y'
7	2	7	-2	12	1	2	-7	-7	-2	10,5	3	7	3	10	2
3	5	3	-5	8	4	5	-3	-3	-5	4,5	7,5	3	7,5	10,5	5
8	7	8	-7	13	6	7	-8	-8	-7	12	10,5	8	10,5	18,5	7
7	2	7	-2	12	1	2	-7	-7	-2	10,5	3	7	3	10	2

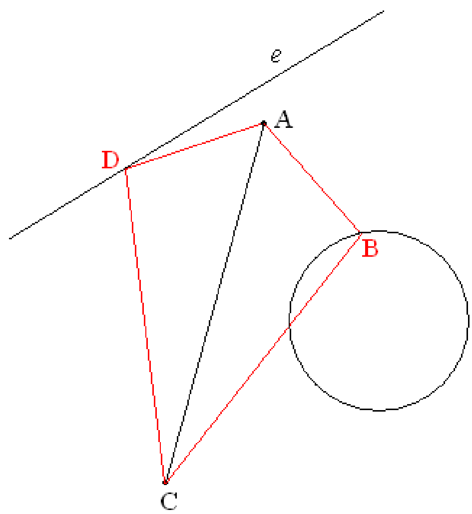
teng.tükr / eltolás / forgatás / középp. tükr / középp. hason / merőleges aff. / nyírás / **Adatok**

Alakzatok

M132: Igazold, hogy a merőleges affinitás és a nyírás egyenestartó! Ehhez elég igazolni, hogy bármely három egy egyenesen levő (kollineáris) pont képe egy egyenesen van.

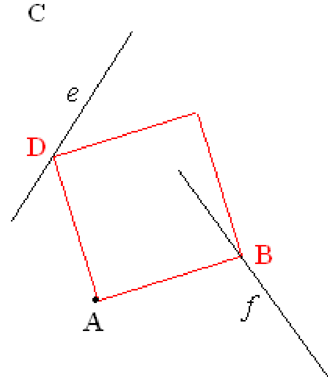
A most ismertetett transzformációkat fogjuk szerkesztési feladatok megoldására felhasználni.

Szerkesztési feladatok:



1. feladat Adott a síkon egy AC szakasz, egy *k* kör és egy *e* egyenes. Szerkesszünk ABCD deltoidot, amelynek AC a szimmetriaátlója, B∈*k* és D∈*e*!

Megoldás: Ha D pontot tükrözzük az AC egyenesére, akkor a B pontba kerül, azaz rákerül a körre. Tükrözzük az egész egyenest az AC egyenesére, s a kapott *e'* képegyenes körre eső pontja(i) a B pont lehetséges helye. 0, 1 vagy 2 megoldás van, attól függően, hogy az egyenes képének hány közös pontja van a körrel.



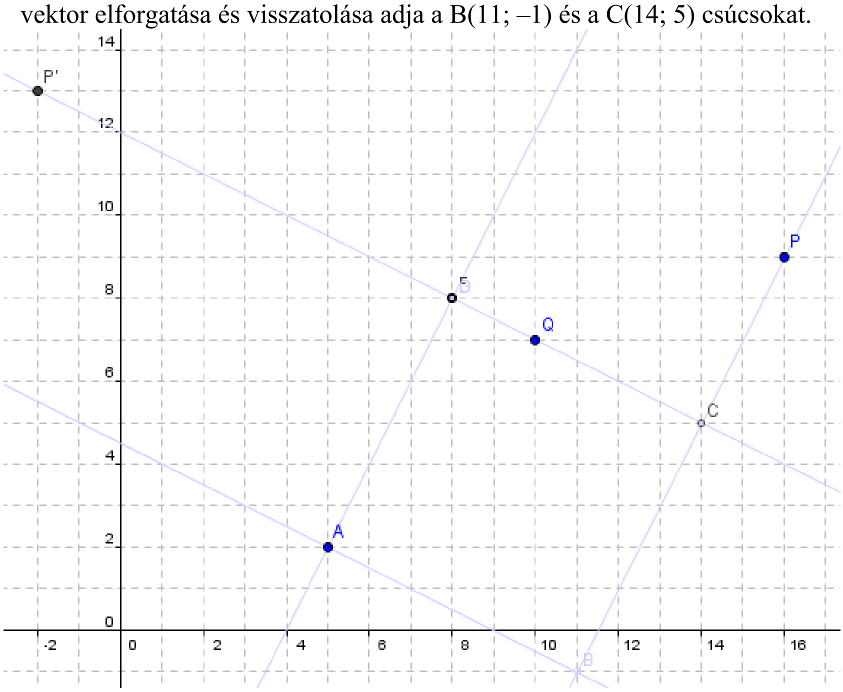
2. feladat Adott a síkon egy A pont, egy *e* és egy *f* egyenes. Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek A az egyik csúcsa, az A-val szomszédos két csúcsa pedig rajta van egy-egy adott egyenesen, azaz D∈*e* és B∈*f*.

Megoldás: Ha B pontot elforgatjuk A pont körül 90°-kal, akkor a D pontba kerül, azaz rákerül az *e* egyenesre. Forgassuk az egész *f* egyenest A körül 90°-kal, a kapott *f'* képegyenes *e*-re eső pontja a D pont lehetséges helye. 0 vagy 1 megoldás van, attól függően, metszi-e az *f'* egyenes az *e*-t vagy párhuzamos vele.

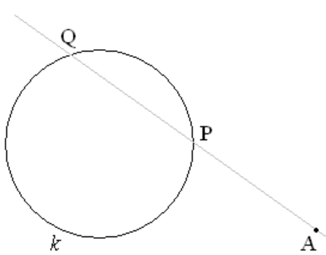
(Hogyan forgatunk el egy egyenest egy pont körül? Elforgatjuk két pontját, s mivel az elforgatás egyenestartó, ezért a képpontokon átmenő egyenes lesz az egyenes képe.)

3. feladat Adott a koordinátasíkon három pont: A(5; 2), P(16; 9) és Q(10; 7). Az A pont egy négyzet csúcsa, P pont a CB oldalegyenes egy pontja, Q pedig a CD oldalegyenes egy pontja. Számítsuk ki a négyzet csúcsainak koordinátáit!

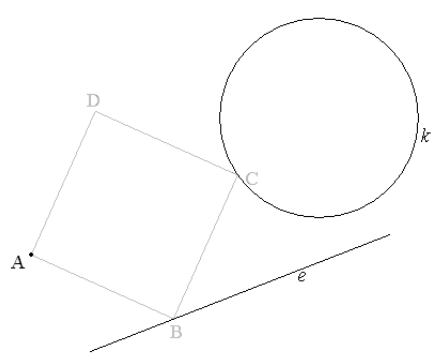
Megoldás: Az alapötlet, hogy az A pont körül 90°-kal elforgatva CB oldalegyenes képe a CD oldalegyenes lesz. Tehát P pontot az A pont körül 90°-kal elforgatva P'Q egyenes azonos CD oldalegyenessel. Innen már könnyű a számolás. Részletezve a számolást: $\overrightarrow{AP}(11;\ 7)$, elforgatva: $\overrightarrow{AP'}(-7;\ 11)$, eltolva A-ba: P'(-2; 13). $\overrightarrow{P'Q}(12;\ -6)=\mathbf{v}_e$, azaz $\mathbf{n}_e(6;12)$, egyszerűbb vektorral: $\mathbf{n'}_e(1;\ 2)$. Így e egyenlete: $x+2y=24$ (Ez a CD oldalegyenes egyenlete). Bocsássunk merőlegest A-ból e-re: f: $2x-y=8$. $e\cap f=D(8;\ 8)$. AD vektor elforgatása és visszatolása adja a B(11; –1) és a C(14; 5) csúcsokat.



4. feladat Adott a síkon egy A pont, és egy k kör. Szerkesszünk olyan A-n áthaladó szelőt a körhöz, amelynek a körrel való metszéspontjai P és Q, és AP=PQ teljesül!



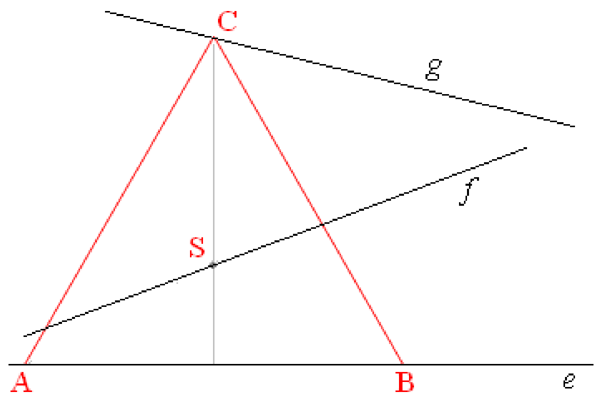
Megoldás: Ha A középpontú, λ=2 arányú középpontos hasonlóságot alkalmazunk, akkor ez a transzformáció P-t éppen Q-ba viszi. Tehát ha a körre végezzük el a transzformációt, akkor k' és k metszéspontja épp a Q pont lesz.



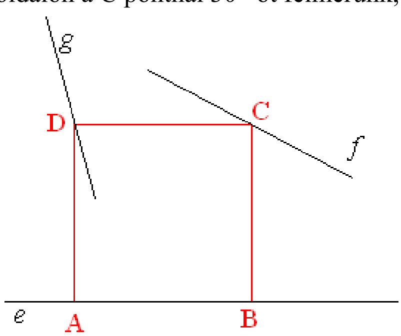
5. feladat Adott a síkon egy A pont, egy e egyenes és egy k kör. Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek A az egyik csúcsa, az A-val szomszédos B csúcsa rajta van az adott e egyenesen, az A-val szemközti C csúcs pedig rajta van a k körön!

Megoldás: Ha alkalmazunk egy A pont körüli 45°-os elforgatást, majd utána egy A középpontú, $\lambda = \sqrt{2}$ arányú középpontos hasonlóságot, akkor az B-t éppen C-be viszi. Tehát ha az e egyenesre végezzük el a transzformációt, akkor e' és k metszéspontja épp a C pont lesz. (Segítség a $\lambda = \sqrt{2}$ arányú középpontos hasonlóság szerkesztéséhez: bármely x szakasz $\sqrt{2}$-szöröse úgy szerkeszthető, hogy egy x oldalú négyzetet szerkesztünk, s annak átlóját tekintjük.)

6. feladat Adott a síkon egy e, egy f és egy g egyenes. Szerkesszünk olyan szabályos háromszöget, amelynek AB oldalegyenese e, a háromszög S súlypontja rajta van az f egyenesen, az e-vel szemközti C csúcs pedig rajta van a g egyenesen!



Megoldás: Ha e tengelyű, λ=3 arányú merőleges affinitást alkalmazunk, akkor ez a transzformáció S-et éppen C-be viszi (a súlypont a súlyvonal harmadolópontja.). Tehát ha az f egyenesre végezzük el a transzformációt, akkor f' és g metszéspontja épp a C pont lesz. C-ből merőlegest bocsátunk e-re, majd erre mindkét oldalon a C pontnál 30°-ot felmérünk, e két félegyenes kimetszi az A és a B csúcsokat.



7. feladat Adott a síkon egy e, egy f és egy g egyenes. Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek e az AB oldalegyenese, a vele szemközti két csúcsa pedig rajta van az f és g egyenesen ($C \in f$ és $D \in g$)!

Megoldás: Ha e tengelyű, λ=1 arányú nyírást alkalmazunk, akkor ez a transzformáció C-t éppen D-be viszi. Tehát ha az f egyenesre végezzük el a transzformációt, akkor f' és g metszéspontja épp a D pont lesz. Ezután ha merőlegest bocsátunk D-ből e-re, ez kimetszi B-t, így megvan egy oldal, ebből már egyszerűen kapható az A és D csúcs.

További feladatok:

M133: Adott a síkon három párhuzamos egyenes. Szerkesszünk olyan szabályos háromszöget, amelynek csúcsai az adott három egyenesen vannak (mindegyik egyenesen egy csúcs)!

M134: Adott a síkon két koncentrikus kör. Szerkesszünk olyan e egyenest, amely mindkét kört metszi, s ha az egyenesen ez a négy metszéspont rendre P, Q, R, S, akkor ezekre PQ=RS=2QR teljesül!

M135: Adott P(5; 8), Q(7; –8), R(17; 3), és S(–3;–6) rendre egy négyzet négy (AB, BC, CD, DA) oldalegyenesén levő egy-egy pont. Határozzuk meg a négyzet csúcsait!

M136: Adott a síkon egy A és egy B pont, továbbá két kör (k_1 és k_2), ahol A és B egy paralelogramma két szomszédos csúcsa, a C csúcs rajta van a k_1, D csúcs pedig a k_2 körön. Szerkeszd meg a paralelogrammát!

M137: Adott a síkon egy A és egy C pont, továbbá két kör (k_1 és k_2), ahol A és C egy paralelogramma két szemközti csúcsa, a B csúcs rajta van a k_1, D csúcs pedig a k_2 körön. Szerkeszd meg a paralelogrammát!

M138: Adott a síkon egy e , egy f és egy g egyenes. Tudjuk, hogy egy ABC szabályos háromszög A és B csúcsa illeszkedik az e egyenesre, a BC oldal felezőpontja illeszkedik az f egyenesre, míg az AC oldal felezőpontja illeszkedik a g egyenesre. Szerkeszd meg a háromszöget!

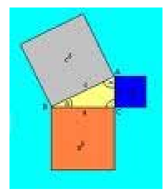
M139: Adott a síkon egy ABCD rombusz, melynek két átlója egy ellipszis két tengelye. Adott továbbá egy e egyenes, amely metszi a rombuszt. Szerkeszd meg az e egyenes és az ellipszis metszéspontjait!

M130: Adott egy „a” és egy „s” szakasz, továbbá egy α szög. Szerkesszünk olyan háromszöget, melynek egyik oldala „a” hosszúságú, a vele szemközti szög α, „s” pedig az „a” szakasz egyik végpontjából induló súlyvonal hosszát adja!

Öt kis matematikai kutatás

Itt öt olyan feladatot találsz, melyek önálló munkára adnak lehetőséget. Minden feladat körülhatárol egy matematikai területet, s e területen belül a kreativitásodon múlik, hogy milyen eredményeket kapsz.
Hogy milyen messzire jutsz el e feladatokkal, sokban azon múlik, tudsz-e önállóan kérdéseket feltenni, mert az általad feltett kérdéseket kell megválaszolnod! Néhány kérdés-mintát adok az egyes témakörökhöz, de ugyanolyan értékesek azok a válaszok is, amelyek nem a megadott minta-kérdésekre válaszolnak, hanem más problémákkal foglalkoznak az adott témarészen belül.
Nézd át ilyen szemmel az eddigi munkalapokat, megmutatják, hogyan érdemes kérdezni egy matematikai területen belül!
Feltehetsz „értelmes” kérdéseket egy témában, akkor is, ha nem tudod őket teljesen megválaszolni!
E témák több munkát feltételeznek, mint a többi munkalap egy-egy feladatmegoldása.

K1: Pitagoraszi számhármasok geometriai kapcsolata



Vizsgálódjunk az egész oldalhosszúságú derékszögű háromszögekben! Mekkorák lehetnek a hegyesszögeik?
Tetszőleges közelséggel megközelíthetik például a 90°-ot?
Vagy a 45°-ot? Lehet-e egész más adatuk (pl.: az átfogóhoz tartozó magasság) is?

K2: Bontás egyenlő területű háromszögekre

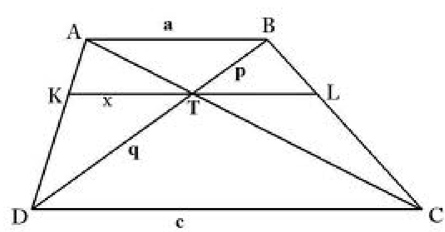
Ha egy ABC háromszög belsejében levő P pontot minden csúccsal összekötünk, három kisebb háromszögre bontjuk az eredeti háromszöget. (ABP, BCP, CAP háromszögek.)
Ugyanezt konvex négyszögekkel vagy még több oldalú konvex sokszögekkel is megtehetjük.
Vizsgáld meg, hogyan kell úgy felvenni a P pontot, hogy a keletkezett kis háromszögek között bizonyosaknak (megfelelő kettőnek, megfelelő háromnak, esetleg mindnek...) egyenlő legyen a területük!
Vizsgálj meg speciális négyszögeket a megfelelő P pont létezése szempontjából!

K3: Egész koordinátájú pontok a kockás füzet körein

A kisméretű kockás füzetben levő négyzetrács egy oldala széltében 27 teljes négyzetet, hosszában 40 teljes négyzetet tartalmaz. Ha koordináta-rendszert veszünk fel egy ilyen füzetben, akkor egy koordináta-egységnek általában egy ilyen négyzetoldalt veszünk.
Mekkora annak a körnek a sugara, amely a lehető legtöbb rácspontot tartalmazza a kerületén? Hány rácspont lehet egyáltalán egy ilyen füzet egy lapjára rajzolt kör kerületén? Tudunk-e valamilyen módszerrel a kerületükön minél több rácspontot tartalmazó köröket megadni?
Megjegyzés: E témához kapcsolódik Freud Róbert – Gyarmati Edit: Számelmélet című könyvének 7.5. fejezete. (Nemzeti Tankönyvkiadó Rt. Budapest, 2000. 304. oldal)

K4: „Harmonikus” sorozatok

Közismert a számtani sorozatoknak az a tulajdonsága, hogy a másodiktól kezdve minden elem az előtte és az utána következő elem átlaga, azaz számtani közepe.
A mértani sorozatokra egy kis megszorítást kell tenni, hogy hasonló állítást mondjunk ki,

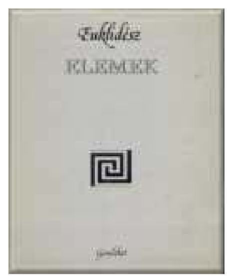


csak a pozitív elemekből álló mértani sorozatokra igaz hasonló állítás: a másodiktól kezdve minden elem az előtte és az utána következő elem mértani közepe.
A megszorítás azért kellett, mert a mértani közép fogalma csak pozitív számok esetére van értelmezve. Felvetődhet a kérdés: nem lehetne ugyanezt másféle középértékkel is helyettesíteni? Így újabb fajta sorozatokat kaphatunk.
Íme a harmonikus közép fogalma:
Ha a_1, a_2, ... a_n **pozitív** számok, akkor harmonikus közepüknek nevezzük a

$$H(a_1; a_{2;\ldots}a_n) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}} = \left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$$ mennyiséget.

Fentiek mintájára azt mondhatjuk, hogy egy sorozatot „harmonikus” sorozatnak nevezünk, ha **minden eleme pozitív** és a másodiktól kezdve minden elem az előtte és az utána következő elem harmonikus közepe.
Végezz vizsgálatokat a harmonikus sorozatok körében! Próbálj minél többféle kérdést megfogalmazni és megválaszolni! (Segítő tippek: rekurzív és általános képlet az n. elemre, monotonitás, egész, racionális és irracionális elemek a sorozatban, geometriai szemléltetés a fenti trapéz ábrája alapján stb.)

K5: Euklidész: Elemek



A könyvnyomtatás feltalálása óta kevés olyan könyv akad, mely oly sok kiadásban látott volna napvilágot, mint Euklidész Elemei. Az időszámításunk előtt 300 körül keletkezett műben korának matematikai ismereteit gyűjti össze az ókori szerző. Sok helyen nehézkes nyelvezetű vagy túlságosan aprólékosnak tűnik a tárgyalásmódja. Meglepő azonban, hogy a mai középiskolai matematika mennyi tételt, definíciót, mennyi bizonyítást átvett tőle.
Keressünk kapcsolatokat – a teljesség igénye nélkül – Euklidész matematikája és a mai magyar középiskolai tananyag közt!
(Az összehasonlításhoz akár egy használatban levő matematika tankönyv is alapul szolgálhat.)