Fizika

Bevezető

A természettudományos gondolkodás, ezen belül a fizikus világlátása, hasznos és gyorsan megtérülő képességek halmazát jelenti nemcsak a tudományos kutatásban, hanem a mindennapi életben is. A minket körülvevő világot értelmezzük, folyamatait modellezzük, kapcsolatait absztrakt módon leképezzük annak érdekében, hogy megértsük működését, s jóslatokat adjunk a jövőre vonatkozóan. Ha valaki képes arra, hogy a természeti és társadalmi változásokat előre jelezze, magabiztosan tud mozogni ebben a világban, hatékony lesz a problémamegoldásban, sikeres emberként fogja leélni életét, foglalkozzon bármivel. Mi kell mindehhez? Az elvont gondolkodás és a gyakorlatorientáltság megfelelő ötvözete, a bevett eljárások, megoldásmódok ismerete mellet az a képesség, hogy a dolgokat tudjuk a megszokottól eltérő módon szemlélni. Ezek az adottságok a sikeres fizikusok nélkülözhetetlen tulajdonságai. Feladatlapjaimban ezen képességek fejlesztését tűztem ki célul.

A feladatlapok megoldása során fokozatosan nehezedő utat járhatsz be. Ezen az úton rávezető kérdések, segítő információk vezetnek előre. A nagyobb sorszámok felé haladva a feladatlapok egyre nehezebbekké válnak, egyre absztraktabb gondolkodásra késztetnek, de magasabb matematikát nem igényelnek sehol sem. A nagyobb sorszámú feladatlapok olykor felhasználják a kisebb sorszámúak anyagát, tehát alapvetően a sorszámok sorrendjében érdemes az anyaggal való foglalkozást megkezdeni, de egy-egy érdekesebb téma kedvéért lehet sorrendi ugrásokat is tenni.

Ha röviden össze kellene foglalnom a fizika feladatlapokban megfogalmazott legfontosabb gondolatot, akkor az a következőképpen szólna:
Minden sokféleképpen végiggondolható, hiszen „*egy a valóság, s ezer a ruhája*”, s mivel az ember, a megismerő nem függetlenítheti magát a megismerés tárgyától, nyugodtan kijelenthetjük: MINDEN NÉZŐPONT KÉRDÉSE!

Térlátás, térhatású kép

Első feladatlapunk a térlátás kérdésével foglalkozik. A térlátás elvét megismerve azt vizsgáljuk, milyen technikai megoldásokkal érhető el, hogy térhatású képet állítsunk elő.

Eötvös Loránd

Egyetemista koromban egyszer egy terepgyakorlaton vettem részt a Balaton mellett. Bázisunk a Geofizikai Intézet Eötvös Lorándról elnevezett kutatóháza volt. Hogy a helyet nem csak a név köti a híres magyar fizikushoz, akkor vált világossá számomra, amikor az ágyakat akartuk elosztani. Tízen voltunk hallgatók: kilenc fiú, egy lány. Az apró épületben lány csoporttársunknak már csak az Eötvös emlékszobában jutott hely, Eötvös ágyába feküdhetett. A szobában megtaláltuk Eötvös kedvenc tárgyait is. Engem különösen az a sztereónézője ragadott meg, mellyel a hegymászásai során készített „3D"-s felvételeit nézegette. A képet kétlencsés fényképezőgéppel készítette. A kettős lencse a két szem által látott képnek megfelelő két felvételt készített. A mikroszkóphoz hasonlatos sztereónézőn keresztül a két képet egyszerre szemlélhettük. Így jött létre a térbeliség illúziója. Azóta sok idő telt el. A 3D-s vetítés elterjedőben van mindenütt. Az alkalmazott trükkök sokat változtak, de a megoldás lényege semmit sem.

A térlátás lényege

A két szemünk ugyanazt a tárgyat kissé eltérő szögben látja, így a két szemből eltérő információk jutnak a tárgyról az agyba. Agyunk értelmezi ezt az eltérést, s ebből következtet a tárgyaknak vagy a tárgyak egyes pontjainak szemeinktől vett távolságára.

1. Hol van az Eötvös Emlékmúzeum a Balaton mellett?
2. Mi volt az a Balatonnal kapcsolatos kutatás, amelyben Eötvös Loránd részt vett, milyen általa tervezett eszközt próbált ki ekkor, s milyen eredménnyel?
3. Eötvös kedvenc hegyvidékén csúcs is őrzi a nevét. Milyen magas ez a csúcs és hol található?
4. Eötvös lányai a női hegymászás első nagyjai voltak. Hogy hívták őket?

Csillagászati távolságok

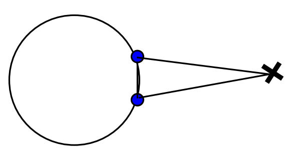
Ha egy távoli csillagot figyelünk meg, akkor annak iránya a Földről nézve nem változik észrevehetően egy év során. Pedig máshonnan nézzük télen és máshonnan nyáron, hiszen a Föld a Nap körüli pályáján fél év alatt átkerül a pálya átellenes pontjába. Mivel a pálya hozzávetőlegesen 150 000 000 km sugarú kör, ezért a Föld elmozdulása 300 000 000 km, a nagyon távoli állócsilla-gokhoz képest.
A parszek (parallaxis secundum) egy csillagászatban használatos távolságegység. Ha egy csillag tőlünk egy parszek távolságra van az ekliptika síkjára körülbelül merőleges irányban, akkor a Föld pályasugara a csillagról nézve 1szögmásodperc alatt látszik. Tehát egy ilyen csillag „nincs nagyon messze” tőlünk, hiszen elmozdulni látszik a távoli állócsillagokhoz képest.

5. **A szöveg alapján készíts vázlatrajzot a *parszek* értelmezésének bemutatására!**
6. **Magyarázd el, hogyan lehet ezt a távolságot meghatározni számítással vagy esetleg szerkesztéssel!**
7. **Egy parszek 3,26156 fényév. Váltsd át ezt az értéket km-be és csillagászati egységbe (CSE)! A fényév és a csillagászati egység fogalmát keresd meg a weben!**

Merre néz a két szemünk?
Vizsgáld meg az ábrán látható két pontot ellazított szemmel!

8. **Milyen messze kell tartanod a papírt a szemedtől, hogy a két pontot 3-nak lássad?**
9. **Hogyan alakul ez a távolság, amikor a két pontot négynek látod?**
10. **Hogyan befolyásolja a pontok kölcsönös helyzetét a papír szemeidtől vett távolsága, illetve az, ha elforgatod a fejed, azaz nem a szemeidet összekötő egyenessel párhuzamos a két pöttyöt összekötő szakasz?**
11. **Magyarázd el, miért következik be a jelenség!**
12. **A tüzérségi távcső két szemhez tartozó optikája jóval messzebb van egymástól, mint a két szemünk. Miért alkalmazzák ezt a megoldást?**

Milyen messze van?



13. **Milyen messze van a szemeidtől egy tárgy azon pontja, amelyről az egyik, illetve másik szemedbe érkező fénysugarak 80 fokos szöget zárnak be a szemeidet összekötő szakasszal (azaz 20 fokos szöget zárnak be egymással)?**

Két szemed távolságát méréssel állapítsd meg, a számítás/szerkesztés menetét rögzítsd!

A kék pöttyök szemeink helyzetét mutatják, a kereszt a vizsgált pontot jelzi. Az ábrán látható egyenlő szárú háromszög alapja a két szemünk távolságával egyenlő, alapon fekvő szögei 80 fokosak.

A színek világa

Newton híres kísérletében egy prizma segítségével összetevőire bontotta a fehér fényt.

14. Magyarázd el, miért bontja a prizma összetevőire a fehér fényt!

Az ábrapár bal oldali ábrájából tükrözéssel állították elő a jobb oldali ábrát.

15. Mit mutat a két ábra, s milyen elv alapján állíthatjuk, hogy mindkét ábra megfelel a valóságnak?
16. Milyen fizikai tulajdonságukban térnek el a fehér fény különböző színű összetevői?
17. Mit jelent a kiegészítő szín fogalma?
18. Nevezz meg kiegészítő színpárokat!

Térlátás színszűrőkkel – az anaglyph (anaglif) képek
http://www.youtube.com/watch?v=pVAoUhp-doE
A bal és a jobb szem az ábrán látható szemüveg révén más képet lát, amennyiben a fényképet vagy a csatolt link alatt lévő videót a képen látható szemüveggel nézzük.

19. Mi a magyarázata az eltérő látványnak?
20. A bal szemen van a piros szemüveglencse. Melyik részét látja ez a szem a képnek? A pirosat vagy a kéket?
A válaszodat indokold!
21. Hogyan lehet ilyen képet elkészíteni? Nézz utána a weben!

Aktív szemüveg

Ma már tudnak olyan szemüveget készíteni, mely összehangolható egy kivetítővel. Így megvalósítható, hogy amikor a bal szemnek szánt képet vetíti a vetítő, akkor csak a bal szemünkön lévő „üveg” ereszti át a fényt, s amikor a jobb szemnek szánt kép látszik a vetítővásznon, akkor a jobb szemünk számára lesz a szemüveg áteresztő. A tévé 120 Hz frekvenciával frissíti a képeket, így a bal és jobb szemünk másodpercenként 60-60 képet lát. Mivel az agyunk a képeket nem folytonosan dolgozza fel (a mozgást állóképek összességeként értelmezzük), a kellő gyakorisággal szemeink elé vetített váltakozó képek sorozata folyamatos látásélményt kelt.

22. **Mit jelent a Hz mértékegység, s honnan kapta a nevét?**
23. **Másodpercenként hányszor sötétül el az aktív szemüveg egy lencséje, ha a tévé képfrissítési üteme 120 Hz?**

A polarizációs megoldás

A fény transzverzális hullám, így polarizálható. A polarizációs megoldás lényege, amelyet például az IMAX mozikban használnak, hogy a bal és a jobb szemnek szánt képek síkban polarizáltak, de a polarizációs síkjuk egymásra merőleges. Az alkalmazott szemüveg lencséi polarizátorok, melyek úgy vannak beállítva, hogy csak a megfelelő szemnek szánt képet lássák. A polarizátoron nem megy át a hullám, ha a polarizátor polarizációs síkja merőleges a hullám polarizációs síkjára.

24. **Mit jelent, hogy a fény transzverzális hullám, s ez hogyan függ össze a fény polarizálhatóságával?**
25. **Hogyan lehet polarizált fényt létrehozni? Hol találkozhatunk polarizált fénnyel a természetben? Mit jelent, hogy a fény síkban polarizált?**
26. **Hogyan történik ebben az esetben a két szemnek szánt eltérő kép szétválasztása?**
27. **Mi történik akkor, ha a fenti elv alapján készült térhatású filmet nézve fejünket egy kicsit elforgatjuk (elbillentjük)? Válaszodat indokold!**

Megoldások, eredmények

5) ld. ábra.

6) 1 parszek = $\approx 3{,}0877 \cdot 10^{13}\,\mathrm{km} \approx 206400\,\mathrm{CSE}$.

12) A térlátásban segít.

13) Ha d a két szem távolsága és h a pont merőleges távolsága a szemeink síkjától: $\frac{d/2}{h} = \mathrm{tg}40^\circ$

14) Más a törésmutatója a különböző frekvenciájú összetevőkre. (Más a különböző frekvenciájú összetevők terjedési sebessége a prizmában.)

15) A fehér fény színekre bontható, majd prizmával újra fehér fénnyé egyesíthető. A fény útja megfordítható.

16) Frekvenciájukban térnek el.

17) Az alapszín és a kiegészítő szín összeadó színkeverés esetén együtt fehéret ad.

19) A szemüvegen keresztül az egyik szemünk csak a piros vonalat, a másik csak a kéket látja.

20) A piros szemüveggel a kék képet látjuk.

22) 1/s – Gustav Hertz német fizikusról.

23) 60-szor.

24) A hullámtér pontjainak rezgésiránya merőleges a hullám terjedési irányára. Csak a transzverzális hullám polarizálható.

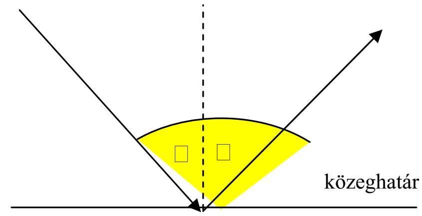
25) Polárszűrővel polarizálható a fény. Pl.: a tükröző felületekről visszaverődő fény részben vagy egészben poláros. A síkban polarizált fény terjedése során egy a terjedési irányra merőleges rezgési síkot tüntet ki.

26) Rezgési sík szerint.

27) Életlen lesz a kép, mert a fejünkkel együtt a szemüveglencsék polarizációs síkja is elfordul.

A fény visszaverődésének törvénye és a Fermat-elv

Néha a megszokottól eltérő megközelítése a dolgoknak meglepően hatékony eljárásokat eredményezhet. Egy ilyen megközelítés a geometriai optikában a Fermat-elv.
A geometriai optika leírása szerint a fény egyenes vonalban terjedő sugárként modellezhető. A fény visszaverődésének ismert törvényét az alábbi ábra mutatja be. A beeső és a visszavert fénysugár azonos szöget zár be a beesési merőlegessel, azaz $\alpha = \beta$.



A fény visszaverődésének törvénye

A Fermat-elv

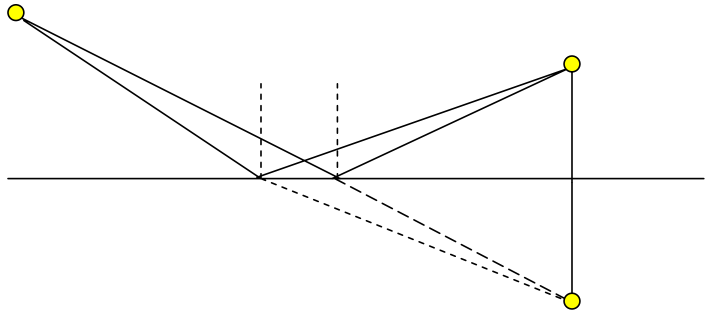
Pierre Fermat francia matematikus 1657-ben megfogalmazott egy általános elvet, amely a geometriai optika összes ismert törvényével összhangban van. A törvényeket ebből az elvből – a Fermat-elvből – is le lehet vezetni.
A Fermat-elv lényege, hogy a fény két pont között mindig úgy halad, hogy leghamarabb célba érjen. Az elv azonban nem magyarázat, hanem egy megállapítás. Miért pont a Fermat-elvnek megfelelően halad a fény? A fény nem választ, nem gondolkodik. Honnan „tudja", merre kell mennie?
Érdekes és általánosítható gondolat, hogy egy valóságban ténylegesen megfigyelhető folyamatot úgy értelmezünk, hogy az az összes számba vehető lehetőség közül az egyik, valamilyen szempontból kitüntetett, különleges, optimális változat.

A kosárlabdázó elhajítja a labdát adott irányba, adott sebességgel, a labda pedig pont belehullik a kosárba. De vajon milyen pályán halad elhajítás után a kosárig? Korábbi tanulmányaink alapján tudjuk persze, hogy a labda parabolapályán halad. De vajon van-e valami szempont, mely szerint a valóság (a parabolapálya) az összes lehetséges pálya közül az optimális? Van-e szempont, amely szerint jobb, mint például egy két egyenesből és egy rövid derékszögű kanyarból összetett pálya, mely szintén a kosárhoz vezet? A válasz egyértelmű igen. A Fermat-elv és általánosítása új megközelítését adja a fizikai törvények keresésének.
Ha a Fermat-elv érvényességének okát nem keressük, akkor is kihasználhatjuk egyszerűségét, s a fényre vonatkozó ismereteinket elegánsan tágíthatjuk segítségével.
Ha a fény egy adott közegben halad, nem lép ki belőle, s így a sebessége nem változik, akkor a legrövidebb idő elve nyilván a legrövidebb út elvével azonos.

A fény két pont között a legrövidebb úton halad, ha nem változik a sebessége (és nincs akadály, ami eltérítse, pl.: egy tükör) — ez pedig az egyenes út.
A fény egyenes vonalú terjedése tehát összhangban van a legrövidebb út elvével.
A fény, átlépve egy másik közegbe, azért törik meg, mert változik a sebessége. A törés mértéke nem független ettől a sebességváltozástól.

A Fermat-elv szemléltetése a fény visszaverődésének törvénye kapcsán, avagy a teve és a folyó problémája

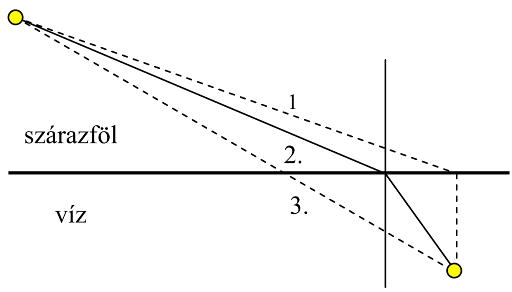
A szomjas teve, bár szeretné mihamarabb elérni úti célját, csak úgy juthat el a kiindulási ponttól odáig, ha közben érinti a folyót, hogy ihasson.



1. Egészítsd ki és értelmezd az ábrát, s magyarázd el, hogyan függ össze a Fermat-elvvel! Hogyan értelmezhető a Fermat-elv segítségével a fény visszaverődésének törvénye?

Az elvet Fermat a fény törését leíró Snellius—Desartes-törvény kapcsán fogalmazta meg. Ábránk a fény törését is mutathatja, de az is lehet, hogy a tengerpartot ábrázolja: a felső tartományban a sárga pont egy úszómester napernyőjének helye, az alsó sárga pontban pedig valaki fuldoklik.

Merre szaladjon az úszómester, ha meglátja a fuldoklót? Melyik utat válassza? Melyik úton ér leghamarabb célba? Az úszómester a parton vagy a tengerben halad gyorsabban, ha a 2-es úton ér leggyorsabban a fuldoklóhoz? Milyen érv szól a másik két út választása mellett, s mi szól ellene?

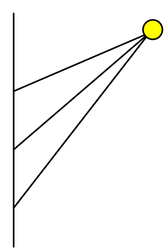


2. **Elemezd a történetet!**

A gömbtükrök leképezése

Egy tükör valódi képet hoz létre, ha egy tárgy tetszőleges pontjáról kiinduló fénysugarakat a tükör egy pontba gyűjti össze. Ha erre a helyre egy ernyőt teszünk, a pont képe felfogható.

3. **Mutasd meg a fény visszaverődésének törvénye segítségével, hogy egy síktükör nem hoz létre valódi képet, azaz az egy pontból kiinduló fénysugarak egy síktükörről visszaverődve nem találkoznak egy pontban.**



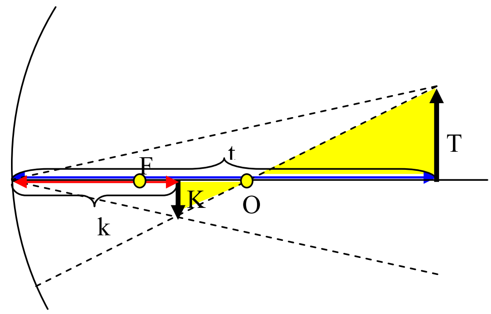
Következő rajzunkon az „O" pont a homorú gömbtükör középpontja. (Ez azt jelenti, hogy egy gömbfelületet használunk tükör gyanánt, melynek homorú oldala tükröz.)
A homorú gömbtükör jó közelítéssel valóban valódi képet hoz létre. Ez kipróbálható akár egy kanál segítségével is.

4. **Vetítsd egy kanál segítségével a gyertyaláng képét a falra! Készíts vázlatrajzot, mely bemutatja az elrendezés geometriáját!**

Ha véletlen akad otthon gömbtükör, kanál helyett az is megfelel! ☺

A tárgy képét egy pontjának leképezésével szerkesztettük meg, néhány könnyen azonosítható sugármenetet felhasználva. Abból a (helyes) feltevésből indultunk ki, hogy egy függőleges helyzetű tárgy képe is függőleges helyzetű lesz.

A T tárgy K képét két jellegzetes sugármenet segítségével szerkesztettük meg. Az egyik a gömbtükör és az optikai tengely metszéspontjába tartó és az optikai tengelyre szimmetrikusan visszaverődő fénysugár, a másik az origón átmenő, ezért a gömbtükör felületére merőlegesen beérkező, s így önmagába visszaverődő fénysugár. A gömbtükör sugara r, középpontja O pont. A tárgy távolsága a tükörtől t, a kép távolsága k.



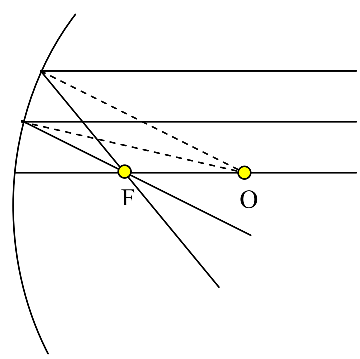
5. Az ábrán jelölt sárga háromszögek hasonlóságát felhasználva igazold, hogy: $\frac{2}{r}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}$

Amennyiben érvényes az a megállapítás, hogy a homorú gömbtükör az optikai tengelyével párhuzamos sugarakat az úgynevezett fókuszpontba (F) gyűjti össze, ahol F távolsága a tükörtől az optikai tengely mentén $f=\frac{r}{2}$, a fenti összefüggés a következő alakot veszi fel: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}$. Ez a gömbtükrök leképezési törvénye. Az összefüggés a domború gömbtükör és a lencsék leképezésére is igaz.

Fókuszálja-e valóban a gömbtükör az optikai tengellyel párhuzamos sugarakat?

A homorú gömbtükör a közvélekedés szerint fókuszálja a fényt. Legalábbis így tanítjuk. Ez azt jelenti, hogy a szimmetriatengelyével (optikai tengely) párhuzamos sugarakat egy pontba gyűjti. Ez valóban pontosan így van?

Az ábra segítségével igazoljuk, hogy amennyiben a gömbtükör az optikai tengellyel párhuzamos fénysugarakat az $f=\frac{r}{2}$ távolságra lévő F fókuszba gyűjti, akkor az F ponttól a tükör pontjai rendre $\frac{r}{2}$ távolságban vannak, vagyis ugyanannak a körnek a pontjai egyszerre helyezkednek el egy O középponttól r távolságra, s egy F középponttól $\frac{r}{2}$ távolságra, ami lehetetlen! Azaz a gömbtükör nem gyűjtheti az optikai tengellyel párhuzamos sugarakat az F pontba.



Feltételeztük, hogy a gömbtükör fókuszálja az optikai tengellyel párhuzamos sugarakat. Bebizonyítottuk, hogy feltevésünk logikai lehetetlenségre vezet. Így a feltevés nem igaz. Ezt az eljárást hívják *indirekt* bizonyításnak.

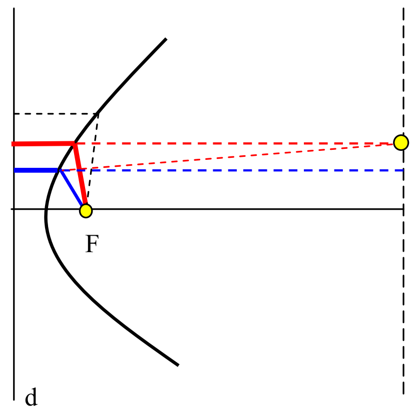
És a parabolatükör…

Ma már minden épületen van parabolaantenna, amely a távoli műholdak jeleit gyűjti össze. Ennek alapján nem meglepő az a kijelentés, hogy a párhuzamos sugarakat a parabolatükör, illetve antenna fókuszálja.

6. Az ábra segítségével és a Fermat-elvet felhasználva igazold, hogy egy parabolatükörrel szemközti tetszőleges „P” pontból a tükör érintésével a fókuszba tartó fénysugár a legrövidebb úton akkor halad, ha az optikai tengellyel párhuzamosan közelíti meg a tükröt!

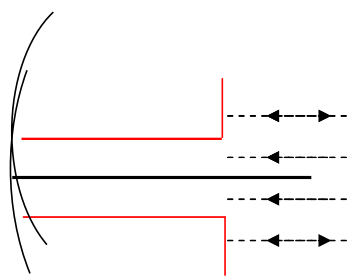
A bizonyításhoz használd fel a parabola alábbi definícióját:

A parabola azon pontok halmaza (mértani helye), melyek egy „F” ponttól és egy „d” egyenestől azonos távolságra esnek.



7. Elemezd, hogy a fenti bizonyítás mennyiben igazolja azt az állítást, hogy a parabolatükör az optikai tengelyével párhuzamos sugarakat fókuszálja?

A gömbtükör nem fókuszál, de használjuk…



Mennyiben, milyen mértékben fókuszálja a homorú gömbtükör a párhuzamos sugarakat?

Annyiban, amennyiben a homorú gömbtükör egy parabolatükörhöz hasonlít. A hasonlóság az optikai tengely közelében nyilvánvaló. A tengely felett és alatt a két tükör igencsak eltér egymástól. Az itt haladó sugarak a gömbtükör esetében gömbi torzulást (szférikus aberrációt) okoznak a keletkező képen, azaz rontják a kép élességét. Ha csökkenteni akarjuk a torzítást, akkor szűrni kell az optikai tengelytől távol eső sugarakat! Meg kell akadályozni, hogy elérjék a tükröt!

8. Ha a gömbtükör torzít, miért gyártanak gömbtükröket? Miért nem csak parabolatükröket használunk?

Ferde hajítás másképpen

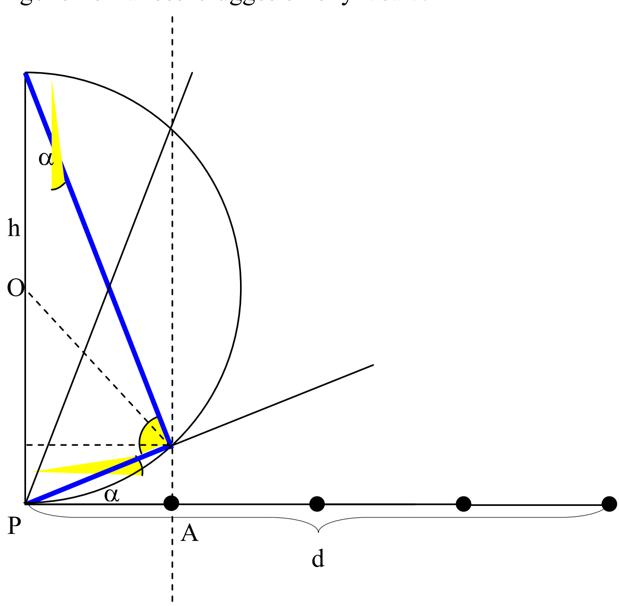
Galilei fogalmazta meg azt az állítást, hogy *a természet nagy könyve a matematika nyelvén íródott*. De mit jelent ez? A fizikai problémák megoldásában egészen a XIX. századig elsődlegesen geometriai eljárásokat alkalmaztak. Sokszor nehéz meghatározni egy fizikai probléma megoldása kapcsán, hogy a geometriai eljárás lépései hogyan felelnek meg a mai, algebrai módszereinknek. Pedig aki ismeri a „szótárt", érdekes új ötletek birtokába juthat.
Makó Pál, a jeles XVIII. századi magyar fizikus leírása alapján bepillantunk a geometria ezen szokatlan alkalmazásának területére, s feltárjuk, hogy az ajánlott lépések miért működnek.

v kezdősebességgel α hajlásszögben elhajított test repülési távolságának meghatározása szerkesztéssel

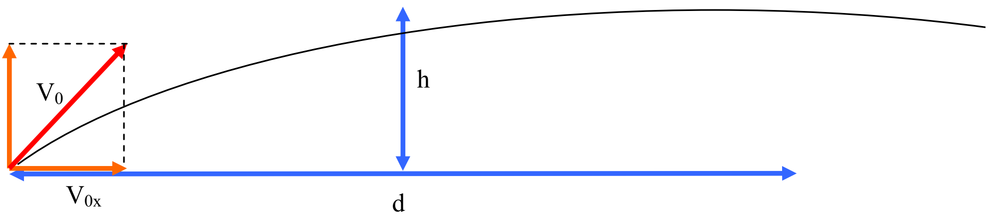
A szerkesztés lépései:

1. Vizsgáld meg, milyen magasra emelkedne fel a test, ha függőlegesen hajítod el (h)!
2. Vegyél fel egy h hosszúságú (értelemszerűen azzal arányos) függőleges szakaszt!
3. Állíts rá egy merőlegest az alsó pontjából!
4. A függőlegesre, mint átmérőre, állíts kört a merőleges oldalán!
5. A két szakasz metszéspontjából mérd rá a vízszintesre a hajítás szögét, s húzz egy egyenest!
6. A kör és az egyenes metszéspontjából állíts merőlegest a vízszintesre!
7. Az így keletkező két párhuzamos egyenes távolságának négyszerese az elhajított test repülési távolsága.

A Makó-féle eljárás helyességének igazolása során alkalmazott szerkesztést felhasználjuk egy ismert trigonometriai összefüggés bizonyítására.



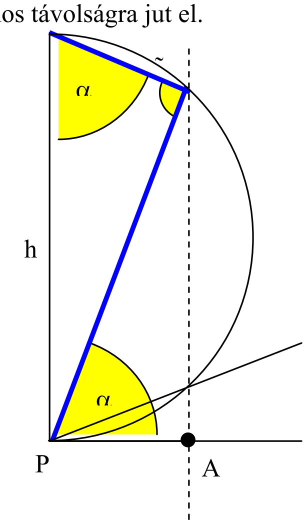
1. **Az ábra felhasználásával igazold az ismert trigonometrikus összefüggést:** $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin 2\alpha$
2. **Makó Pál szerkesztésének igazolása**
   - Igazold, hogy $\overline{PA} = h\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$!
   - Írd fel *d* értékét a szerkesztés alapján!
   - Határozd meg *d* értékét a jelenleg használt fizikai elvek és eljárások alapján, a ferde hajítást összetett mozgásként értelmezve!

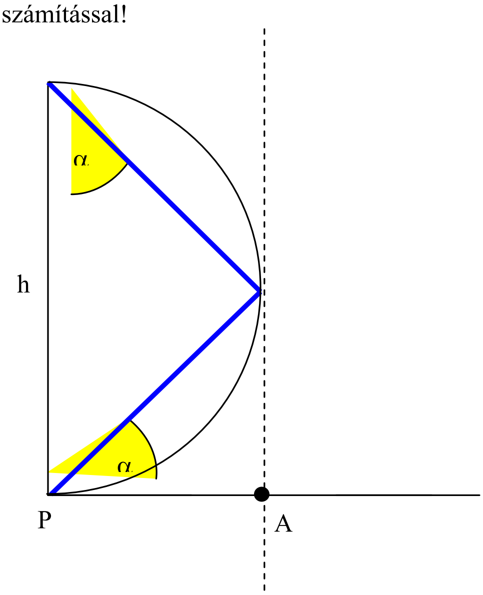


   - Mutasd meg a két eredmény azonosságát!

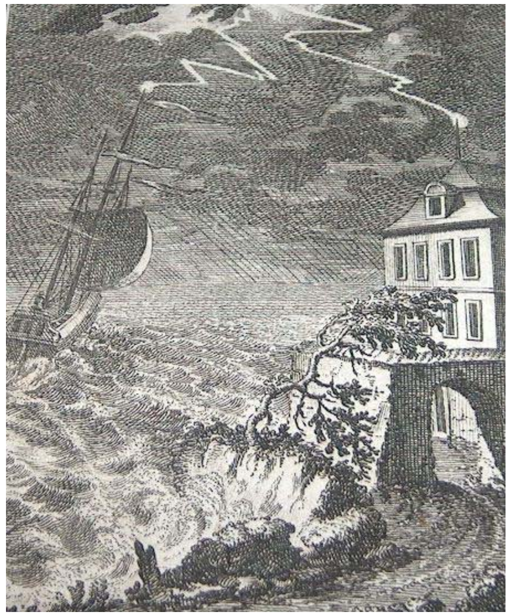
Ha egy adott kezdősebességgel ferdén elhajítunk egy testet, általában két olyan összetartozó hajítási irányt (hajlásszöget) találunk, amely esetén a test azonos távolságra jut el.

3. **Milyen összetartozó szögpárokra érvényes az állítás?**
4. **Igazold — a szerkesztés alapján vagy a klasszikus levezetést felhasználva — a szögpárok közötti összefüggést!**
   - $\overline{PA} = h\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha$
5. **Milyen irányba kell a testet elhajítani, hogy a legmesszebb repüljön? Mekkora lesz ez a távolág?**
   Állításodat igazold Makó Pál szerkesztésével, majd számítással!





Makó Pál egy fontos munkájában a villámokkal foglakozott.

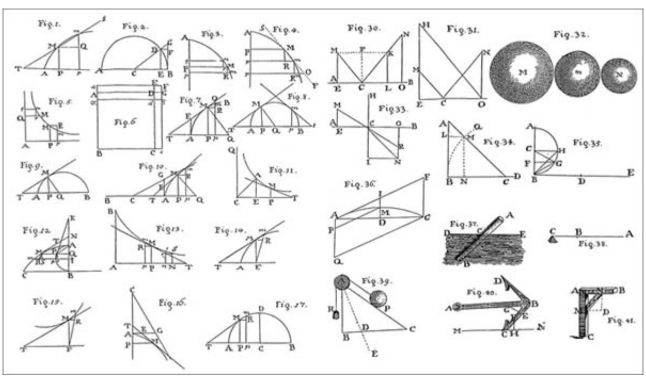


6. **Mi volt munkájának címe?**
7. **Hol és mikor jelent meg először?**
8. **Milyen címen és kinek a fordításában jelent meg magyarul?**
9. **Ez mikor történt és hol adták ki a könyv magyar fordítását?**

Az alábbi feladatok megoldására Makó Pál stílusában add meg a szerkesztési algoritmust!

10. **Milyen irányba kell elhajítani egy v_0 kezdősebességű testet, hogy d távolságra repüljön el?**
    Legyen $v_0 = 10$ m/s; $d = 8$ m

11. **Mekkora kezdősebességgel dobjunk el egy testet, hogy vízszintes talajon α szögben elhajítva éppen d távolságra érjen talajt?**
    $\alpha = 35°$; $d = 10$ m.



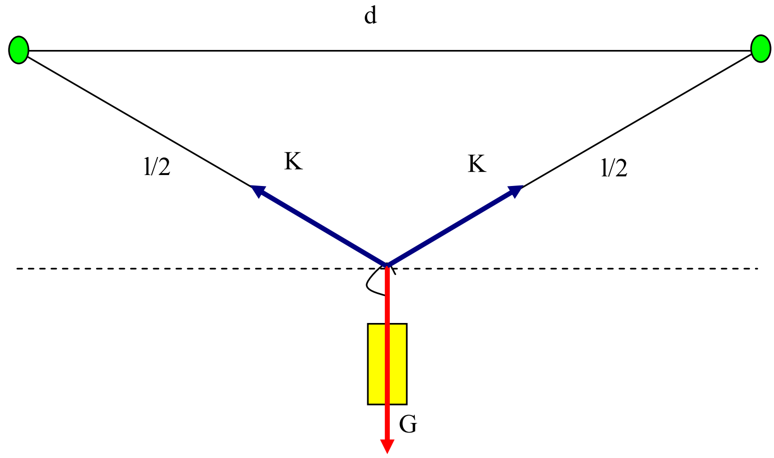
Ábralap Makó Pál egyik tankönyvéből

Statika: a kötélben ébredő erő

Látszólag egy egyszerű statika feladat egyre bonyolódó változatait nézzük végig. Közben ki fog derülni, hogy mindez másra is jó, mind a fizikában, mind a matematikában.

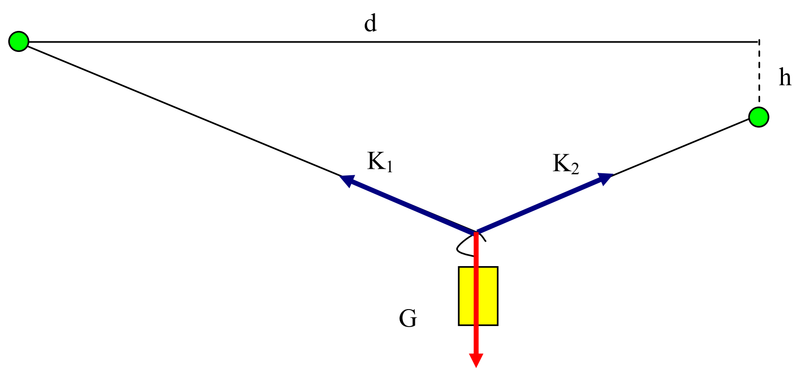
A feladatok megoldásának logikája egy matematikus szemszögéből meglehetősen furcsa bizonyításhoz vezet egy nem éppen könnyű matematikai tétel esetében.

Egymástól *d* távolságra, azonos magasságban rögzítjük egy *l* hosszúságú kötél két végét *(l > d)*. A kötélre egy a kötélen könnyen csúszó kampó segítségével *m* tömegű testet akasztunk. Hol fog elhelyezkedni a test? Mekkora erő ébred a kötélben?



1. **Határozd meg a *K* erő nagyságát, amennyiben *d* = 4 m; *l* = 5 m; *G* = 10 N.**
2. **Mekkora a *K* erő, ha a kötél a vízszintessel 30°-os szöget zár be?**

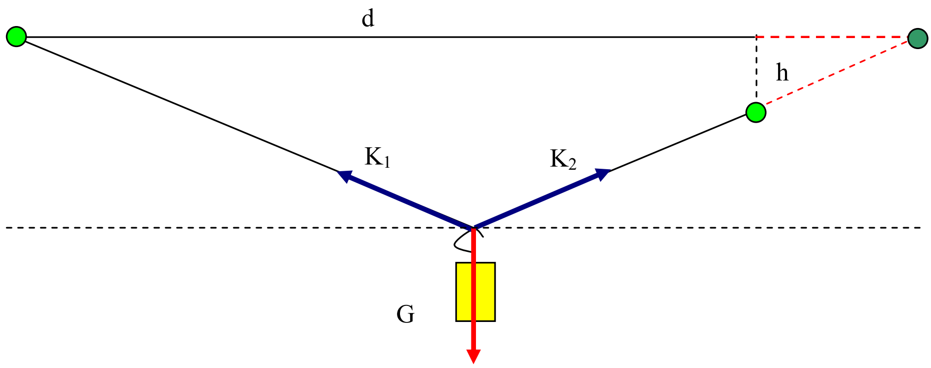
A feladat lényegesen nehezebbé válik, ha a kötél rögzítései nem azonos magasságban vannak. Ábránkon a jobb oldali rögzítési pont került lejjebb.



Most az elsődleges nehézséget a vízszintessel bezárt szögek meghatározása jelenti.

3. Vajon mit állíthatunk K_1 és K_2 viszonyáról? S mi következik ebből a kötélszárak vízszintessel bezárt szögeinek viszonyára? Válaszodat indokold!

A válasz megadásában és a megfelelő indoklás megtalálásában segít az ábra.

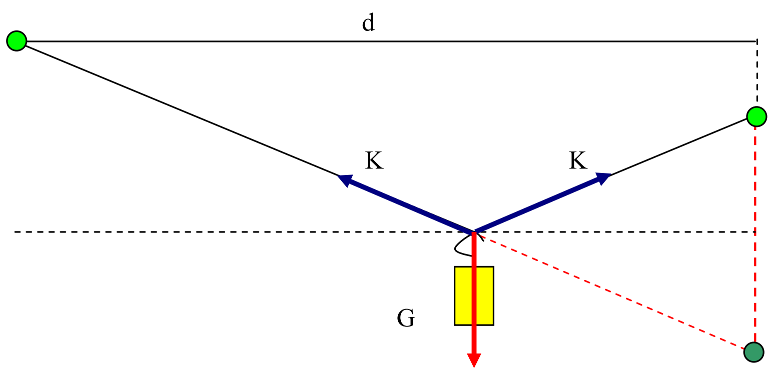


De vajon hogyan alakulnak az elrendezés geometriai viszonyai?

4. Mekkorák a *K* erők?

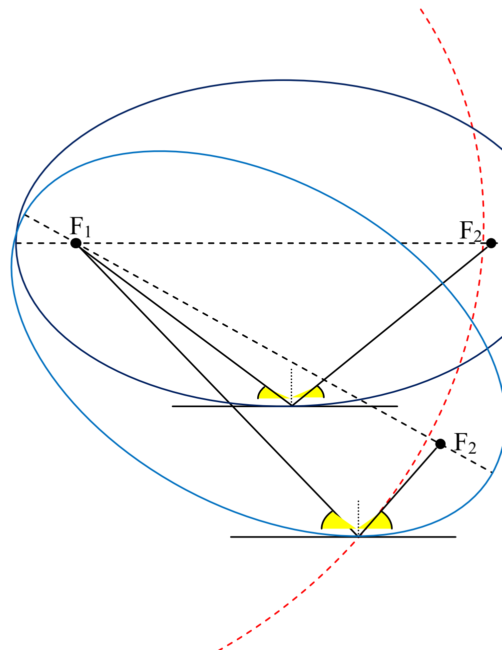
A feladat megoldása során használjuk a következő konkrét adatokat:
$d = 4$ m; $l = 5$ m; $h = 0{,}5$ m; $G = 10$ N.

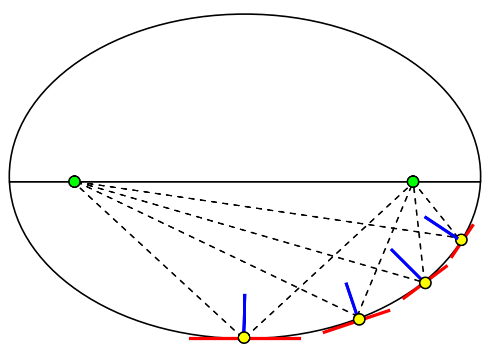
A probléma megoldásában segít az alábbi ábra:



5. **Milyen síkidomot ír le a kampó, ha a feszesen tartott kötél mentén mozgatom az *m* tömegű testet úgy, hogy a két rögzítési pont állandó?**
6. **Milyen sajátsága van az egyensúlyi helyzetnek? Melyik kitüntetett pontja ez a pont a görbének?**
7. **Hogyan változik a feladat, ha a jobb oldali rögzítési pontot (F_2) egy F_1 középpontú kör mentén mozgatom lefelé, azaz a két rögzítési pont távolságát állandónak tartom?**

Befolyásolja mindez az egyensúlyi helyzetről és a kampó által leírt görbéről megállapítottakat?





Azzal, hogy a két rögzítési pont távolsága nem változott és a két ponttól vett távolság összege, azaz a kötél hossza is változatlan maradt, a kampó helye (egyensúlyi helyzet) egymáshoz képest elforgatott, egybevágó ellipszisek alsó pontjait jelölte ki. Itt a kötélerők a korábbiakból következően egyenlők, így a kötelek azonos szöget zárnak be a vízszintes-sel. Mivel a két fix pont kölcsönös helyzetét tetszés szerint változtathattuk, így az egyensúlyi helyzetek lényegében ugyanazon ellipszis tetszés szerinti pontját írják le. Ezen pontokra érvényes lesz a kötélerőkre, így a kötelekre is vonatkozó megállapítás a szimmetriáról, ami egyenértékű egy, az ellipszisre vonatkozó fontos geometriai tétel megállapításával.

8. **Mi lehet ez az állítás?**
   A kapott eredmény a fény visszaverődésének törvényével összevetve érdekes megállapítást hordoz az ellipszis tükörről.

9. **Mi ez az ellipszis tükörre vonatkozó megállapítás?**
10. **Hogyan érvényesül a Fermat-elv ebben az esetben?** (ld. 2. feladatlap)
    Ami a fényhullámokra érvényes, ebben az esetben érvényes a hanghullámokra is. Ha egy ellipszis alakú helyiség egyik fókuszában suttognak, a másik fókuszában a szöveg remekül hallható.
11. **Keress egy példát a jelenség irodalmi, történelmi, kultúrtörténeti feldolgozására!**

Az ütközések problémája, ahogy 200 évvel ezelőtt látták

Ahogy erről korábban már volt szó, a fizika teljes matematizálása újkeletű dolognak tekinthető. Ebben a feladatlapban azt vizsgáljuk, hogyan tárgyalta a rugalmas és rugalmatlan ütközést a XIX. század elején egyik első tankönyvünkben Varga Márton a megmaradási tételek és a matematikai apparátus nélkül.
Hogyan hasznosíthatjuk, tágíthatjuk eredményeit, s mindez hogyan jelenik meg a mai tankönyvekben?
Az alábbiakban egy szokatlan „szövegértési feladattal" foglalkozunk, melynek követéséhez némi fantáziára is szükség van a régies nyelv miatt.

Varga Márton, a magyar nyelvű természettudomány úttörője

Varga Márton 1767. március 20-án született Monostorapátiban. Alsóbb iskoláit és gimnáziumi tanulmányait Szombathelyen és Székesfehérváron végezte. Ezután Győrben filozófiát tanult, majd Komáromba került. Itt a bencés rendi gimnázium tanára lett 1796-tól 1798-ig. 1798-ban a nagyváradi akadémián a *Természet Tudományának, a természet Históriájának és a Mezei Gazdaságnak Királyi rendes Tanítója* lett. Akadémiai tanárként a természettudományok magyar nyelven való tanításának fontosságát hirdette, s valósította meg háromkötetes tankönyvében.
„Használni igyekeztem, az bizonyos. Nemzetem dísze ditsősége, java, a vallásra való buzditás voltak fő ösztönim, az erköltsök jobbitgatása, hogy nem deákul, mely kevesebbe kerültt volna, hanem magyarul irtam. Megmutattam, hogy anya nyelvünk ereje megbirja a Filosofiát, hogy lehet Fisikát olly tökéletessen rajta irni, mind a deák oskolás könyveink vannak."[1]
Varga Márton tankönyvsorozatának első két kötete *A gyönyörű természet tudománnya* címmel jelent meg 1808-ban Nagyváradon, míg a különálló harmadik kötet *A tsillagos égnek és a Föld golyóbissának az ő tüneménnyeivel együtt való természeti előadása, s megesmértetése* egy évvel később, ugyancsak Nagyváradon. Az első két kötetet a magyar nyelven megjelent fizika tankönyvek legfontosabbjaként tarjuk számon.

Kinizsi Pál, aki holta után is törököt ölt

Varga Márton fizikakönyvében arra törekedett, hogy az olvasó elé tárt ismereteket minél közérthetőbben mutassa be. Ennek érdekében számos történetet, gyakorlati vonatkozású utalást helyezett el mondandójában:

„A' viszsza rugó valamelly mozdúlhatatlan viszsza rúgóval ütközvén meg, azon gyorsasággal ugrik viszsza, a' mellyel megütközött: mert ha viszsza rúgó nem volna. nyugodni kellene néki, de mivel az, a' második időpontban az egész gyorsaságát viszsza nyeri. Kinisi Pál márvány oszlopára Nagyvásonyban egy esmérős török reá lövött, talán vas golyóbissal, boszszút akarván holta után is álni a „Törökség" hajdani ostorán; de magának volt a' töröknek ezen lövés halálos; mivel a viszsza ugrott golyóbis keresztül ment rajta. Innét támadott a' hír: Kinisi holta után is törököt öl."

Bár Varga Márton törekedett a képszerűségre és a nyelvi egyszerűségre, szövegének megfejtése és mai fogalmakra való átültetése mégsem könnyű.

[1] Varga Márton: A gyönyörű természet tudománnya I. kötet. Nagyvárad. 1808.

1. **Mit jelentenek az alábbi kifejezések a szövegben: *vissza rúgó*, *mozdulhatatlan*?**
2. **Milyen törvényszerűséget fogalmaz meg Varga Márton a szövegben? Newton melyik törvényére utal, annak megnevezése nélkül? Mit állíthatunk a leírt ütközésről, ismertesd és értelmezd saját szavaiddal!**

A rugalmatlan és rugalmas ütközés Varga Márton leírásában
(a helyesírást a továbbiakban egyszerűsítettem)
A rugalmatlan ütközés
A nem rugó kemény testek egyenes ütközetének törvényei ezek. Ha a lassabban sietőbe ütközik az utána gyorsabban futó, mind a kettőnek egy közönséges célja vagyon, az ütközet után mind a kettőnek egyenlő a gyorsasága, mert a lassabban haladó a sebesebben rohanónak mindaddig akadálya, míg oly nagy mozdulással nem bír, hogy amennyit a rohanó utána siet, annyival ő előbbre lóduljon. Evégre szükséges, hogy a rohanó annyi gyorsaságot közöljön vele, amennyi az egyenlőségre megkívántatik, másként az akadályozás fennmaradna. Ha ez megvan, világos, hogy egyenlő gyorsasággal kell nekik haladni az ütközet után. Kitetszik innen, hogy a lassabban haladó nagyobb gyorsaságot nyer az ütközetben, a rohanó pedig veszt annyit, amennyit amaz nyer a hatás és visszahatás törvénye szerint. Másrészről mind a kettőnek együtt nincs se nagyobb, se kisebb gyorsasága az ütközet után, mint együttvéve mindegyiknek az ütközet előtt volt.
Együttvéve az ütközet előtt MC+mc, az ütközet után való ismeretlen gyorsaságot X-nek neveztük, lesz tehát, ha ezt a masszáknak summájával sokasítjuk X(M+m) = MC+mc. Oldjuk fel ezen egyenletet, lészen $X = \dfrac{MC + mc}{M + m}$*, azaz a közönséges gyorsaság az ütközet után egyenlő az ütközet előtt volt mozdulás nagyságának summájával, elosztva a masszák summájával.*

3. **Hogyan fogalmaznád meg mai nyelven a fentieket?**
4. **M = 3 kg tömegű, v_1 = 4 m/s testet utolér egy m = 1 kg tömegű, v_2 = 8 m/s sebességű test, és tökéletesen rugalmatlanul ütköznek. Mekkora lesz a testek sebessége az ütközés után?**
5. **M = 3 kg tömegű, v_1 = 4 m/s test szembetalálkozik egy m = 1 kg tömegű, v_2 = 7 m/s sebességű testtel, és tökéletesen rugalmatlanul ütköznek. Mekkora lesz a testek sebessége az ütközés után?**

A tökéletesen rugalmas ütközés
„A tökéletesen izmos visszarúgóknak egyenes ütközetéről minekelőtte szólunk, szükséges közönségesen megjegyezni, hogy ezek a testek először magukat összenyomják és ez az első ütközet, másrészről hogy az összenyomott részek midőn az előbbeni figurájukat visszanyerik, megint egymásba ütköznek, és ez a második ütközet. Mivel a testek tökéletesen visszarúgóknak tétetnek, az is feltétetik, hogy az összenyomó erőkkel a visszarúgók egyenlők. Mind a két ütközet úgy megy végbe, mint a nem rúgókban, csak az a különbség, hogy ha valamelyik test veszt, vagy nyer gyorsaságot, a vesztés is dupla és a nyereség is, mivel kettős az ütközet és így sokkal erőszakosabb változás történik a visszarúgók ütközetében, mint a nem rúgóknál. Az ütközés törvényét hogy megértsük, vegyünk fel egy példát megfejtés végett. Legyen a rohanó test masszája M, a lassabban az előtt mozdulóé m. M legyen 2, m pedig 1. A

rohanó gyorsasága az ütközet előtt C = 6, az elől haladóé c = 3. A közönséges gyorsaság, mivel ismeretlen, legyen X. Az ütközés első idejében, ha a testek visszarúgók nem volnának, $X = \dfrac{MC + mc}{M + m}$ *vagy* $\dfrac{12 + 3}{3} = 5$*, tehát a rohanónak vesztesége 6 − 5 = 1, az elől haladónak nyeresége 5−3 = 2. Az első ütközetben tehát az elől menőnek nyeresége X − c, a másodikban is ennyit nyer, lesz tehát 2X − 2c az egész nyereség. Ehhez még hozzá kell adni az ütközet előtt való gyorsaságot, mely c, lészen annak okáért az eredmény 2X − 2c+c, mely tesz*
2X − c-t.
A rohanónak vesztesége az első ütközetben C − X, a másodikban is ennyi, tehát az egész veszteség 2C − 2X. Ezt ki kell húzni az ütközet előtt valóból, lészen tehát
C − 2C + 2X = 2X − C.
A felvett példa legyen ennek megvilágosítója. Az X = 5 − 3 = 2, 5 − 3 = 2, tehát a nyereség az elől menőben = 4, volt pedig a gyorsaság 3, együtt tehát 7 az egész gyorsasága az ütközet után. A rohanónak vesztesége 6 – 5 = és másodszor is 6 − 5. Így összességében = 12 − 10, ezt kihúzván a 6 – 12 + 10 = 4.”

6. Mit jelent az az állítás, hogy két ütközés zajlik a tökéletesen rugalmas ütközés („tökéletesen izmos visszarúgás”) esetén?

Oldjunk meg együtt egy feladatot, a Varga Márton által alkalmazott logikát követve:
Egy $m = 2$ kg tömegű testet utolér, s azzal rugalmasan ütközik egy $M = 3$ kg tömegű test. Az m tömegű test sebessége $v_1 = 1$ m/s, az M tömegűé $v_2 = 6$ m/s.
Ha a két test tökéletesen rugalmatlanul ütközne, összetapadna, s együtt menne tovább, közös sebességük a lendületmegmaradás törvényével összhangban $X = \dfrac{MC + mc}{M + m}$ összefüggésből lenne számítható. $v_k = \dfrac{3 \cdot 6 + 2 \cdot 1}{5} = 4\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.
A lassabb test tehát 3 m/s sebességet nyerne, ha az ütközés tökéletesen rugalmatlan lenne („első ütközet”), de mivel tökéletesen rugalmas, a nyereség 6 m/s. Így az m tömegű test végső sebessége 7 m/s lett.
A gyorsabb test az első fázisban 2 m/s sebességet veszít. A veszteség a második fázisban is ugyanennyi, azaz összesen 4 m/s. Így az M tömegű test ütközés utáni sebessége 2 m/s lesz.
Oldd meg az alábbi feladatokat:
$M = 3$ kg tömegű, $v_1 = 4$ m/s testet utolér egy $m = 1$ kg tömegű, $v_2 = 8$ m/s sebességű test, és tökéletesen rugalmasan ütköznek.

7. Mekkora lesz a testek sebessége az ütközés után?

M = 3 kg tömegű, v_1 = 4 m/s test szembetalálkozik egy m = 1 kg tömegű, v_2 = 7 m/s sebességű testtel, s tökéletesen rugalmasan ütköznek.

8. Mekkora lesz a testek sebessége az ütközés után?

Amikor a két test összeütközött, egy „pillanatig” együtt mozogtak, azonos lett a sebességük. Közöttük ebben a fázisban rugalmas erő lépett fel, ez gyorsította a lassabb, és lassította a gyorsabb testet. A deformációk megszűnése után (második fázis) ugyanaz az erő ismét sebességváltozást idézett elő, mindkét testben pontosan az első fázisnak megfelelőt (az összenyomott „rugó”, visszanyerte alakját).

9. Varga Márton rugalmas ütközésre vonatkozó leírása alapján írd fel paraméteresen a két ütköző testnek a rugalmas ütközés során szerzett sebességeit!

Az alábbi paramétereket használd:
Tömeg: *m, M.*
Ütközés előtti sebességek: v_1, v_2.
Ütközés utáni sebességek: u_1, u_2.

Varga Márton eredményeire a rugalmas ütközés vizsgálata során az energiamegmaradás és a lendületmegmaradás törvényének egyidejű használatával juthatunk.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a testek azonos irányban haladnak egy egyenes mentén:

A lendületmegmaradás törvénye szerint

$$m \cdot v_1 + M \cdot v_2 = m \cdot u_1 + M \cdot u_2$$

A mozgási energia megmarad, hiszen az ütközés tökéletesen rugalmas, ezért

$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} M \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} M \cdot u_2^2$$

10. Oldd meg a fenti két ismeretlenes egyenletrendszert, s igazold Varga Márton formuláit!

Varga Márton gondolatmenete a kétlépcsős ütközésről, ahol mindkét ütközés azonos mértékű változást okoz, jobban megérthető, ha nézőpontot változtatunk. Vizsgáljuk meg a 7. és 8. feladatot egy olyan megfigyelő szemszögéből, amelyik az első ütközés végén, azaz a két test pillanatnyi összetapadása során együtt mozog a testekkel! Ez megfelel a tökéletesen rugalmatlan ütközés végén kialakult közös sebességgel mozgó megfigyelőnek.

11. Határozd meg, hogy a 7. és 8. feladatban mekkora sebességgel mozgott ez a megfigyelő, s hozzá képest mekkora sebességgel, illetve mekkora lendülettel közeledtek, illetve távolodtak a testek a tökéletesen rugalmas ütközések során!

12. Foglald össze a mozgó megfigyelő tapasztalatait a 7. és 8. feladatban mind a tökéletesen rugalmatlan, mind a tökéletesen rugalmas ütközésre vonatkozóan!

A kvantummechanika kezdetei

1913. március 31-én Zemplén Győző a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja „A röntgen-sugarak rezgésszáma és az elemi energia-adagok hyphotesise” címmel tartott előadást. Az akadémikusok magas szintű tudományos előadásai teljességgel érthetetlenek voltak egy laikus számára, és azok most, majd száz év elteltével is. Hogy Zemplén Győző előadását mégis megértheti egy mai művelt középiskolás, ez annak köszönhető, hogy a kvantummechanika 1913-ban még csak 13 éves volt. Einstein két évvel később Nobel-díjjal jutalmazott tanulmánya a fotonok létének igazolásáról pedig ekkor még csak 8 éves. Ebben az évben születik a Bohr-modell, s ekkor születik Max von Laue − utóbb szintén Nobel-díjjal jutalmazott − felfedezése a röntgensugarak diffrakciójáról természetes rácsokon. Mindezt összevetve elmondható, hogy Zemplén Győző cikke a kvantummechanika legfrissebb eredményeivel foglalkozott. A cikkben megfogalmazott következtetés megkérdőjelezi Planck kvantumhipotézisét. De vajon hol a hiba Zemplén gondolatmenetében? Nyomozzuk ki együtt!

Ismerkedjünk meg a cikk szerzőjével a Magyar Életrajzi Lexikon alapján:
Zemplén Győző (Nagykanizsa, 1879. okt. 17. – Monte Doloro, Olaszország, 1916. júl. 29.): fizikus, műegyetemi tanár, az MTA l. tagja (1908).

1896–1900-ban az Eötvös-kollégium tagjaként végezte a budapesti egyetemen tanulmányait. 1898-ban a gázok belső súrlódásáról írt dolgozatával Pasquich-díjat, a kutatás továbbfolytatásáért 1901-ben Than-díjat nyert. 1902-ben avatták doktorrá, Eötvös Loránd mellé került gyakornoknak, majd tanársegédnek. Két év múlva Göttingenbe és Párizsba ment tanulmányútra. 1905-től a tudományegyetem magántanára. 1907-től a József Műegyetem magántanára, 1912-től az elméleti fizikai tanszék tanára. Kutatásaiban a relativitáselmélettel és a radioaktivitással foglalkozott. A Michelson-kísérletnek új magyarázatát adta: a fény a fényforrástól különböző irányokban, különböző sebességgel terjed. Előadásaiban a Maxwell-féle elektrodinamikát és a kinetikai gázelméletet ismertette. 1914-ben a fronton az ütegek helyének megállapítására hangbemérő módszert dolgozott ki. Lefordította Pierre Curie és Maria Sklodowska Radioaktív anyagokra vonatkozó vizsgálatok (Budapest, 1906) című művét. Az I. világháborúban elesett. Nevéről hidrodinamikai tételt neveztek el.
A Zemplén Győzőről szóló megemlékezés a *Nyugat* című folyóiratban:
http://epa.niif.hu/00000/00022/00203/06288.htm
Olvasd el figyelmesen Zemplén Győző írását, s válaszolj a kérdésekre! Segítségedre lehetnek tankönyveid és a világháló.
(A cikket kismértékben rövidítettem, a mértékegységeket a ma használatosokra cseréltem, de sem a szóhasználaton, sem a számértékeken nem változtattam. A tehetséggondozó feladatsorhoz tartozó honlapon az eredeti cikk is megtalálható.)

A RÖNTGEN-SUGARAK REZGÉSSZÁMA ÉS AZ ELEMI ENERGIA-ADAGOK HYPOTHESISE.

Zemplén Győző l.-tagtól

Régóta kutatnak a physikusok a Röntgen-sugárzás körében *elhajlás-* (diffractio-) és *interferencia-jelenségek* után, remélvén, hogy ez úton e sugarak természetéről tudomást szerezhetnek. Minden jel arra mutat, hogy igen közel vagyunk e problémának végleges megoldásához, mely szerint a Röntgen-sugárzás is elekro-mágneses rezgések hullámszerű tovaterjedése, akárcsak a fény és a Hertz-féle hullámok. Már régebbi vizsgálatok valószínűvé tették, hogy ha a Röntgen-sugarak elektromágneses rezgések, hullámhosszúságuk minden esetre jóval (több ezerszer) kisebb, mint az eddig ismeretes legrövidebb ibolyántúli fényhullámoké. Ily csekély hullámhosszúság mellett nem igen lehetett remélni, hogy az optikai rácsok mintájára előállított szerkezetekkel a Röntgen-sugarak diffractióját ki lehessen mutatni. Laue-nek támadt az a merész gondolata, hogy optikai rácsnak ez esetben egy kristály molekuláinak rendszerét használják fel; a molekuláris elmélet szerint a kristályokban a molekulák szabályos térbeli rácsot alkotnak, melyen a kristályra eső elektromos hullám elhajlást szenved; ezeknek az elhajlított sugaraknak interferálniok kellene. Laue és társai az elméletnek megfelelően diffractió-képeket kaptak, ha a Röntgen-sugarak keskeny nyalábját a kristályon keresztülbocsátották.

Hogy a diffractió-képből a sugarak hullámhosszúsága kiszámítható legyen, ismerni kell a rácsállandót, a jelen esetben két molekulaközéppont legkisebb távolságát. A molekuláris elmélet alapján ma már elég megbízható eljárásokkal tudjuk meghatározni az ú. n. Avogadro-féle számot, az egy grammmolekulában foglalt molekulák számát; ismerve a vizsgált kristály molekulasúlyát, sűrűségét és a molekulák térbeli eloszlásának rendszerét, minden adatunk megvan a rácsállandó meghatározására.

LAUE társai legpontosabb méréseiket egy czinkszulfid-kristályon végezték, mely a szabályos rendszerbe tartozik s így a molekulák egyszerű derékszögű térbeli rácsot alkotnak benne. LAUE számításai szerint a keletkező diffractiókép magyarázatára öt különféle hullámhosszúságú sugárzás jelenlétét kell feltételezni, melyeknek hullámhosszúsága:

$$\lambda = 1{,}27\cdot 10^{-9}; 1{,}90\cdot 10^{-9}; 2{,}24\cdot 10^{-9}; 3{,}55\cdot 10^{-9}; 4{,}83\cdot 10^{-9}\,\mathrm{cm} \quad (1)$$

A LAUE-féle számítás egyetlen adata, melynek helyességében kételkedni lehet, az Avgadro-féle szám; ma azonban ezt is már oly biztossággal ismerjük, hogy a különféle, egymás közt igen eltérő eljárásokkal meghatározott számértékek alig térnek el több mint 10 százalékkal egymástól, úgy hogy a LAUE-féle eredmények nagyságrendjét mindenesetre helyesnek kell elfogadnunk.

Minthogy ilyenformán igen nagy rezgésszámú elektromágneses jelenség létezéséről szereztünk tudomást, nem lesz érdektelen ezeket az eredményeket összevetni egy igen általános és a physika különféle ágaiban szép eredményekkel kecsegtető hypothesissel. Értem az elemi energia-adag hypothesisét, melyet Planck legelőször a hősugárzásbeli jelenségek elméletében állított fel és a mely szerint az energia — csak úgy, mint az anyag — bizonyos legkisebb részeknél kisebb adagokra nem osztható és a rendszerek energiatartalma mindig ezen „elemi energia-adagnak” egész számú többszöre. Ez az első pillanatra annyira idegenszerű föltevés igen sok eddig rejtélyesnek látszó tünemény kielégítő magyarázatát szolgáltatta, úgy, hogy minden valószínűség szerint egy igen mélyenjáró természeti igazság előfutárja.

Plancknak, hogy a thermodynamika alapelveivel összeütközésbe ne jusson, föl kell tennie, hogy az elemi energia-adag nem ugyanaz a különféle elektromágneses rezgések esetében, hanem egyenesen arányos a rezgések szaporaságával; e szerint, ha e az elemi energiaadag,

$$\varepsilon = h\cdot\nu \quad (2)$$

ahol ν a másodperczenkinti rezgések száma, h pedig egy universalis állandó, mely a fekete test sugárzása alapján kísérlettel meghatározható:

$$h = 6{,}55 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$$

A legkisebb energia-adag e szerint a lassú elektromágneses rezgések esetében; pl. a drótnélküli telegraphiában használatos hullámoknál (λ-t 500 méternek véve):

$$\varepsilon = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}55 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^{8}}{5 \cdot 10^{2}} \approx 4 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{J} \qquad (3)$$

Oly csekély mennyiség ez, mely a kísérletben megfigyelés alá jutó összes energiához képest rendkívül csekély, nem remélhető tehát, hogy e hullámok energiájának adagoltságáról kísérleti úton meggyőződhessünk.

Nem úgy a nagyobb rezgésszámú sugárzásoknál; már fénysugaraknál az elemi adag a (3) alattinak kb. ezermilliószorosa, vagyis $4 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

Röntgen-sugaraknál az említett mérések szerint az elemi adag a különböző hullámhosszúság szerint:

$$1{,}55 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} \text{ és } 4{,}11 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J} \qquad (4)$$

határok közé esik.

A következőkben arra figyelmeztetek, hogy kísérleti adatok alapján eldönthető, vajjon az elemi energia-adagoknak ez a következménye összeegyeztethető-e a Röntgen-sugarakra vonatkozó egyéb tapasztalatainkkal.

Tudjuk, hogy a Röntgensugárzás úgy keletkezik, hogy kathódsugarak őket elnyelő akadályokba ütköznek, a kathódsugarak pedig a mai felfogás szerint negatív töltésű részecskékből — elektronokból — állanak, melyek nagy sebességgel röpülnek tova. A Röntgen-sugarak keletkezését részleteiben a következő módon képzelhetjük el magunknak: a negatív elektron a súlyos anyag molekuláiba ütközve, megosztja velük energiáját, melynek egy része a molekulák eleven erejét (hőmérsékletét) növeli, míg egy része a molekulákkal kapcsolatos elektromos töltésű részecskéket hozza rezgésbe, vagy pedig maga az elektron lép be rezgésszerüen valamely molekula kötelékébe; mindkét esetben e rezgések Röntgen-sugarak forrásaivá lesznek. Arra nézve, hogy a kathódsugarak energiájának hányadrésze alakul át Röntgen-sugárenergiává, pontos mérések adnak felvilágosítást. A legmegbízhatóbb ilyen méréseket WIEN würzburgi laboratóriumában végezték WIEN és tanítványai. A továbbiakban E. CARTER méréseire támaszkodunk, melyek szerint a keletkezett Röntgen-sugárzás energiájának *(E_r)* és a sugárzást keltő kathódsugárzás energiájának viszonya platina antikathód használata mellett:

$$\frac{E_r}{E_k} = 1{,}07 \cdot 10^{-3} \qquad (5)$$

Ez a viszonyszám persze az egész kathódrészecske-rajra és az általa keltett összes Röntgen-sugarakra vonatkozik, azonban azt mindenesetre bajos elképzelni, hogy nem minden kathódelektron kelt Röntgen-sugárzást s így jogosnak látszik az a föltevés, hogy a viszonyszám minden egyes ütközésre külön-külön érvényes.

Az idézett Carter-féle adat 59000 Volt feszültségre vonatkozik (a kísérltekből kitűnik, hogy a «hatásfok» a feszültséggel arányos). E feszültség mellett egy kathódrészecske energiája: $U \cdot e = 8{,}85 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}$, ahol e az elektron elemi töltése, mely a legújabb mérések szerint kerekszámban $1{,}5 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$. Eszerint egyetlen elektron energiája: $8{,}85 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}$ volna. Ámde ennek az energiának csak mintegy ezredrésze ld. (5) alakul át Röntgen-sugárzás energiájává, tehát az egyetlen kathódösszeütközés alkalmával kisugárzott Röntgenenergia:

$$E_r = 9{,}46 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} \qquad (6)$$

Ez a számérték körülbelül 440-szer kisebb, mint a Röntgen-sugarak legkisebb rezgésszámának megfelelő (4) alatti energiaadag, míg a legnagyobb rezgésszámra vonatkozó energia-adag az egyetlen ütközés alkalmával átadott energiamennyiséget majdnem 1700-szorosan múlja fölül.

Azok az adatok, a melyeken e számítások alapulnak, nem teljesen megbízhatók, azonban kizártnak tekintendő egy oly rendű hiba, mely ezt az energia-adag hypothesise és a közönséges elektromágneses elmélet eredményei között mutatkozó nagy eltérést megmagyarázhatná.

*

A következőkben néhány ellenvetést czáfolok meg, melyekkel a fenti okoskodást meg lehetne támadni.

1. Azt lehetne állítani, hogy Laue és társainak mérései nem a primär Röntgen-sugarak hullámhosszúságát adják meg, mert hiszen a kristályban keletkező secundär sugárzás szolgáltatja az interferentia-képeket. Ezzel azonban az ellenmondás nem szűnik meg. Kísérjünk ugyanis figyelemmel egyetlen elektront, mely az antikathódba ütközve Röntgen-sugárzást kelt; e Röntgensugárzásnak energiája a (6) alatti *E.* A primär sugárzás a kristály molekulába ütközve secundär sugárzást indít meg, melynek energiája nem lehet nagyobb, mint E; e szerint megint csak arra az eredményre jutunk, hogy a secundär sugárzásban kisebb energiarészletek vannak jelen, mint az az energia-adag, a mely a Planck-féle hypothesis szerint c sugárzás rezgésszámának megfelel.
   Ha a (6) alatti *E* volna a primär Röntgen-sugárzás energia-adagja, akkor ebből a közönséges Röntgen-sugarak hullámhosszúságára nézve $2\cdot10^{-8}\,\mathrm{m}$ -nyi érték következnek, a mi az összes eddigi kísérletek eredményeivel ellenmondásban van.

2. Azt lehetne esetleg képzelni, hogy nem minden kathód-elektron kelt Röntgen-sugárzást, hanem némelyiknek energiája mozgásenergiává alakul át, másoké pedig Röntgen-sugárzássá; e felfogás mellett szólna az a körülmény, hogy egyetlen kathód-elektron energiája ugyanolyan rendű mennyiség ($8{,}26\cdot10^{-15}\,\mathrm{J}$) mint a Röntgen-sugarak elemi energia adagja. A jelenség mechanismusát úgy lehetne elképzelni, hogy az elektronok a molekulák között végigfutva csak az antikathód belsejében ütköznek össze molekulákkal s az ott keletkező Röntgen-sugárzás az anyagban szenvedett absorptio következtében részben visszaalakulna hőmozgássá. E felfogás azonban nem egyeztethető össze azzal a kísérleti tapasztalattal, hogy a kathód-elektronokat a fémek sokkal nagyobb mértékben nyelik el, mint a Röntgen-sugarakat, tehát azokból a rétegekből, a hol az elektronok elnyeletnek, a Röntgen-sugárzás még úgyszólván minden gyöngülés nélkül távozik el. De ez esetben ismét a Röntgen-sugárzás absorptiója következtében lépnének fel az elemi adagnál kisebb energiarészletek.

3. Még legkomolyabbnak kell tekintenem azt a feltevést, hogy a primär Röntgen-sugarak nem maguk fedezik a secundär sugárzás energiaszükségletét, csak *kiváltják* a secundär sugárzást, mely a kristály atomenergiájának rovására szabadulna fel. Ez a felfogás ez idő szerint kísérleti adatokkal meg nem czáfolható, de persze nem is bizonyítható; ha azonban beválnék, akkor Laue és társai kísérleteinek fontossága igen lényegesen megnövekednék, mert a *mesterséges radioactivitás* első példáit szolgáltatnák.

*

Mindebből kitűnik, hogy a Röntgen-sugarakra vonatkozó legújabb kísérleti tapasztalatok nem hozhatók összhangzásba az elemi energia-adag hypothesisének következményeivel. Mégsem tekintem az elmondottakat a Planck-féle föltevés döntő czáfolatának, egyrészt mert ahhoz is még szó fér, vajjon a Röntgensugarak valóban nagy rezgésszámú elektromágneses sugarak-e, másrészt mert az idézett ellenmondás esetleg az energia-adag hypothesisének átfogalmazása által megszüntethető.

Föl lehetne például tenni, hogy az energiának elemi adagok szerinti eloszlása csak akkor történik meg, ha adott energiamennyiséget sok resonator között kell elosztani, egy elszigetelt kathód-elektron ütközésére tehát nem érvényes; az energiának elemi adagok szerinti eloszlása csak akkor következnék be, a mikor már bizonyos energiamennyiség sok kathód-elektron összeütközése következtében felhalmozódott. A föltevés ebben az átfogalmazásban ama módosításra emlékeztet, a melyet eredeti hypothesisén Planck maga eszközölt a legújabb időben; e szerint a resonatorok energiafölvétele folytonosan történnék és csak az energiakibocsátás történnék elemi adagok szerint. A jelenség mechanismusába azonban az ilyen alapon kifejtett elmélet esetében nehezen tudunk betekinteni.

Hasonló átfogalmazások segítségével az elemi energia-adag hypothesise bizonyára megmenthető, azonban a szükséges mellékföltevések feltétlenül elhomályosítják az eredeti elmélet tisztaságát.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1913 márcz. 31.-én tartott üléséből.)

**

Max von Laue (1879-1960)

1. **Hogyan következtethetünk a fény rácson való elhajlásából a fény hullámhosszára?**

A cikk elemzése során induljunk ki Max von Laue hullámhossz méréseinek eredményéből.

2. **Mekkora a Laue által megadott hullámhosszú röntgenfotonok energiája?**

A számítás során a ma elfogadott adatokat használd!

A Planck álladó: $6{,}63\cdot10^{-34}\,\mathrm{J}$ a fény sebessége: $3\cdot10^{8}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Hasonlítsd össze eredményeidet Zemplén Győző számításaival!

A röntgensugárzás cikkben említett forrása a katódsugárcső.

3. **Mi a katódsugárcső működésének elve? Hogyan keletkezik a röntgensugárzás?**

Az 59 000 V feszültségen gyorsított elektron mozgási energiája 59 keV lesz.

4. **Mit jelent ez az állítás? Hány Joule ez az energia?**

Az elektron töltése $1{,}6\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}$

Ha az anódba becsapódó elektron teljes mozgási energiája egyetlen röntgen foton formájában szabadul fel az anód anyagával való kölcsönhatás során, akkor egy elektron becsapódása során 59 keV energiájú röntgen-foton keletkezik.

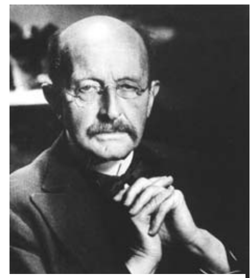
5. **Mekkora lesz ennek a fotonnak a frekvenciája és a hullámhossza? Hogyan viszonyul ez a Laue által mért hullámhosszakhoz?**

Bár az 1913-ban ismert fizikai állandók értékét mára pontosították, Laue hullámhosszmérése és Zemplén Győző fotonhullámhossz-számítása sem tartalmaz akkora hibát, hogy a Zemplén Győző által észlelt eltérést magyarázza. Az is helyes állítás, hogy az anódba csapódó elektronok energiájának csak csekély része alakul át röntgensugárzássá. Ennek az aránynak a meghatározására Compton adott összefüggést, mely szerint $\eta = 1{,}1\cdot10^{-4}\cdot Z\cdot U$ kifejezés számértéke megadja, hogy az anódba csapódott elektronok energiájának közelítőleg hány százaléka alakul át röntgensugárzássá, ahol Z az anód anyagának rendszáma, U pedig a gyorsító feszültség kV-ban mérve.

6. **Mekkora az energiaátalakulás hatásfoka a Zemplén Győző által tárgyalt esetben? Hasonlítsd össze számítási eredményedet a cikkben szereplő értékkel!**

Az ellentmondás feloldását Zemplén Győző is megtalálta, s mint egy lehetséges ellenvetést saját gondolatmenetével szemben le is írta cikkének végén (ellenvetések cáfolata 2. pont).

7. **Keress olyan cikket az Interneten vagy könyvben, amely igazolja Zemplén Győző második ellenvetését, s feloldja az általa felismerni vélt ellentmondást a Planck-féle fontonelmélet és a röntgensugarak hullámhosszára vonatkozó kísérleti eredmény között!**
8. **Foglald össze saját szavaiddal a cikk lényegét, s mutasd meg, hol hibás a szerző érvelése és miért!**



Max Planck (1858-1947)

Minden nézőpont kérdése

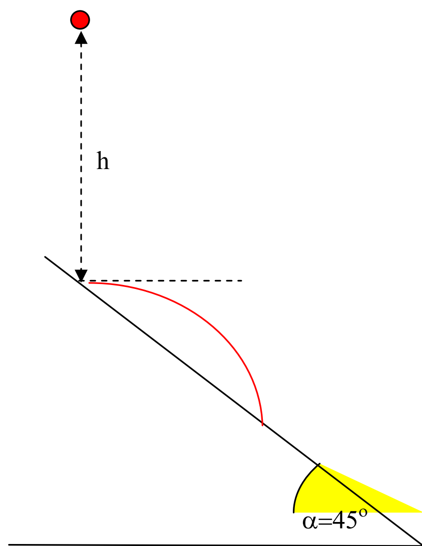
Ez a feladatlap egy meglehetősen összetett problémával foglalkozik. Megoldása ugyanakkor egyszerűbbé is válhat, ha felismerjük, hogy *minden nézőpont kérdése*.

Egy 45°-os lejtőre *h* magasságból kis méretű, tökéletesen rugalmas gumilabdát ejtünk. Egy pattanás után hol (az első lepattanás helyétől milyen távolságra) éri el másodszor a gumilabda a lejtőt? A feladatot lépésről lépesre fogjuk megoldani.

1. **Határozzuk meg, mekkora szögben éri el a labda a lejtőt!**

2. **Mekkora lesz a visszaverődés szöge?**

A labda olyan törvényszerűség szerint pattan vissza a lejtőről, ahogyan a fény verődik vissza a tükörről.



3. **Fogalmazd meg azt a törvényszerűséget!**

A labda „visszaverődésének” törvénye a következők alapján értelmezhető: a becsapódó labda sebességvektorának lejtőre merőleges komponense előjelet vált, a lejtővel párhuzamos komponens megmarad.

4. **Mi indokolja a lejtőre merőleges komponens előjelváltását? Milyen ütközésként lehet felfogni ezt a kölcsönhatást?**

5. **Hogyan következik mindebből a labda „visszaverődésének” törvénye?**

Ha a fényt rugalmas részecskéknek tekintjük (Descartes), akkor a fény visszaverődésének törvényét hasonlóan lehet értelmezni.

Vizsgáljuk meg, hogy a 45°-os hajlásszögű lejtő esetén hol ér másodszor lejtőt a *h* magasságból leeső test!

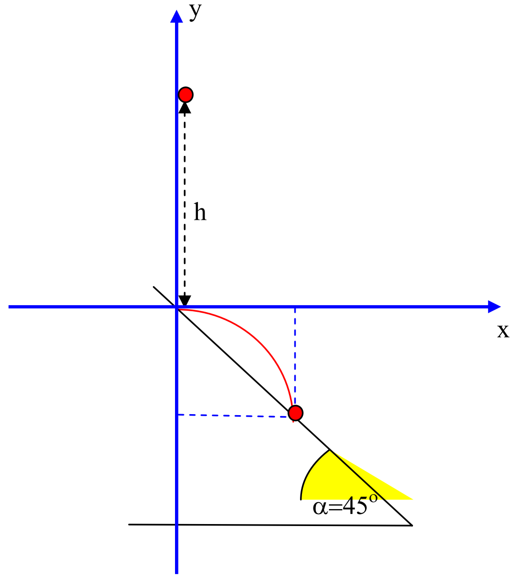
6. **Mekkora a gumilabda sebessége a lejtőt érés pillanatában? *h* legyen 1,25 méter!**

7. **Milyen irányban fog elindulni a gumilabda az ütközés után?**

A vízszintesen elhajított test egyszerre mozog szabadeséssel függőlegesen lefelé, s egyenes vonalú egyenletes mozgással vízszintesen. A két mozgás eredője határozza meg pályáját. Mi-

vel a lejtő 45°-os, a vízszintes irányú elmozdulás és a függőleges irányú elmozdulás azonos az első és második becsapódás között.
A vízszintes irányú egyenes vonalú egyenletes mozgás és a homogén gravitációs térben történő szabadesés (függőleges hajítás), azaz a függőleges mozgást leíró összefüggés általánosságban a következőképpen írható fel:

$x = v_{0x}t$, $\quad y = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$



A függőleges hajítás önmagában is összetett mozgás. Függőleges irányú egyenes vonalú egyenletes mozgásból és nulla kezdősebességű szabadesésből van „összetéve".

8. Ezek alapján értelmezd a konkrét feladatban az „y"-ra vonatkozó összefüggést!

Hogy a helyes előjelviszonyokat áttekinthessük, koordinátarendszert helyezünk az ábránkra. Ebben az esetben tehát $x = -y$

9. Mennyi idő telik el az első és második pattanás között? Mekkora lesz eközben a vízszintes és függőleges elmozdulás? Mekkora távolság van az első és a második pattanás helye között? ($g \approx 10\frac{m}{s^2}$ **)**

Vizsgáljuk meg a problémát abban az esetben, amikor a lejtő hajlásszöge 30°!
Az alább látható ábra segítségével válaszolj a következő kérdésekre:

10. Mekkora lesz a gumilabda sebessége az első pattanás után? Mekkora szöget zár be a gumilabda sebességvektora a vízszintessel ebben az esetben? Mekkora a lejtővel bezárt szög?

11. Ha a lejtő 30°-os, a második pattanás helyére nem az *x* = *-y* összefüggés lesz az érvényes, hanem a 30°-os lejtőnek megfelelően $x = -\sqrt{3}y$. Vajon miért?

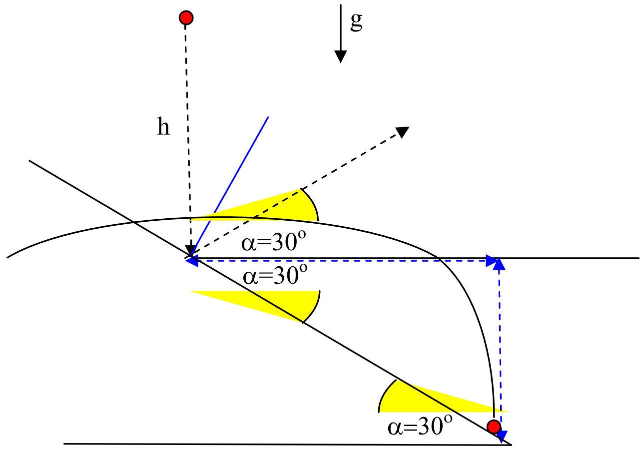
12. Számold ki az első pattanás utáni sebesség vektorának vízszintes és függőleges összetevőit, helyettesíts be a megadott képletbe, add meg a második pattanás koordinátáit, és számold ki a két pattanás távolságát!

$x = v_{0x}t$

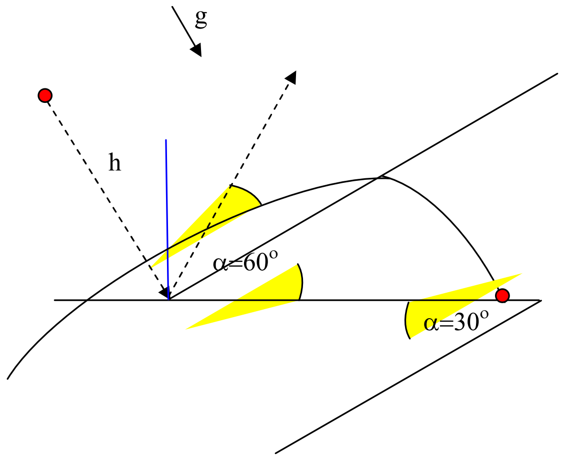
$y = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$;

$x = -\sqrt{3}y$

;

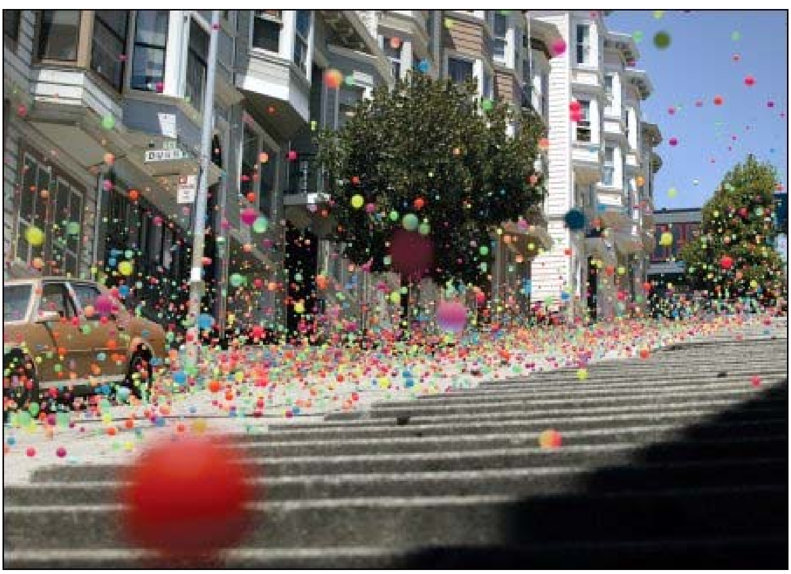


Nem lehetne másképpen? Hiszen minden nézőpont kérdése!
Az alsó ábra úgy keletkezett, hogy a felsőt 30°-kal elforgattuk. Az alsó ábrában a lejtőnek nyoma sincs, ez egy egyszerű ferde hajítást mutat, viszont van egy meglepő sajátsága az alsó ábra világának. Itt ugyanis a gravitációs gyorsulás vektora nem függőleges, hanem azzal 30°-os szöget zár be, és előre mutat.
Ebben a világban a mozgások vízszintes irányban sem egyenletesek, hanem gyorsulók.



13. Számold ki a *g* gyorsulás „vízszintes” és „függőleges” komponensét, majd az alábbi, módosított egyenletrendszer megoldásával határozd meg az x’ értékét! Mutasd meg, hogy az eredmény azonos a 12. feladat megoldásával!

$$x' = v_{0x'}t + \frac{g_{x'}}{2}t^2 \qquad y' = v_{0y'}t - \frac{g_{y'}}{2}t^2$$



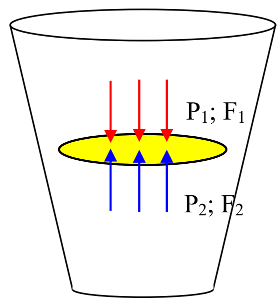
Hidrosztatika

(avagy út egy művészettörténeti rejtély megoldásához: Miért nem pipával ábrázolta Csontváry Kosztka Tivadar az öreg halászt?)

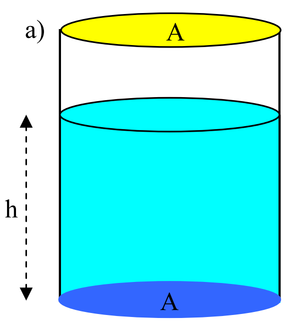
A folyadékok közismert tulajdonsága, hogy bennük a nyomás minden irányba gyengítetlenül terjed. Ez a tény a folyadékok összenyomhatatlanságának következménye. Ezt igazolja az ismert kísérlet a vízibuzogánnyal:

1. Hogyan értelmezhető a kísérlet, s mennyiben igazolja a vízben a külső nyomás minden irányban egyenletes, gyengítetlen terjedését?

Mindez azt jelenti, hogy a folyadék belsejében elhelyezett, elhanyagolható vastagságú lapra alulról és felülről azonos nyomás és ezért azonos erő hat. $P_1 = P_2;\ \ F_1 = F_2$



2. Javasolj olyan mérést, melynek segítségével igazolható, hogy az alulról ható nyomás csak attól függ, milyen mélyen van a felület!



Határozzuk meg, hogy mekkora a nyomás egy adott folyadék (pl.: a víz) belsejében, *h* mélységben! A számítás könnyen elvégezhető, ha egy egyenes henger alakú, vízzel *h* magasságig megtöltött pohár fenekére ható nyomóerőt vizsgáljuk.

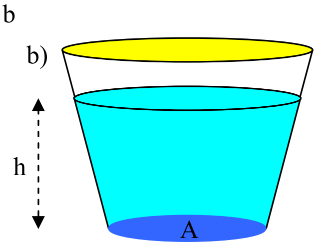
3. Határozd meg a víznek a pohár aljára gyakorolt nyomását!

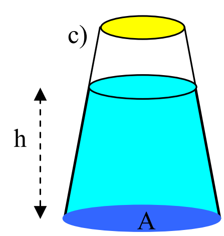
a., Számítsd ki a víz térfogatát!

b., Határozd meg a súlyát, ami a nyomóerővel egyenlő!

c., Írd fel paraméteresen a nyomást!

(A víz sűrűségét ρ_v -vel jelöljük, a gravitációs állandó *g*.)





A hidrosztatikai paradoxon kimondja, hogy a nyomás akkor sem lesz más *h* magasságú vízoszlop alján, amikor az edény alakja az egyenes hengertől eltérő.

A b) esetben az edényben nagyobb súlyú víz van, mint az egyenes henger (a) változat) esetében, a c) esetben pedig az edényben lévő víz súlya kisebb, mint a víz által kifejtett nyomóerő. A hidrosztatikai paradoxon szerint a nyomások s így a nyomóerők is azonosak az edények alján az a), a b) és a c) esetben. Mindez a folyadékokban terjedő nyomás fentebb leírt sajátságaival magyarázható.

4. De vajon hogyan? (Készíts rajzot!)

a. A b) esetben hogyan nyomja a folyadék az edény falát (illetve az edény fala a folyadékot)? Hogyan magyarázható mindebből, hogy az edényben lévő folyadék súlyánál kisebb nyomás hat az edény aljára?

b. A c) esetben hogyan nyomja a folyadék az edény falát (illetve az edény fala a folyadékot)? Hogyan magyarázható mindebből, hogy az edényben lévő folyadék súlyánál nagyobb nyomás hat az edény aljára?

A hidrosztatikai paradoxon egyenértékű állítás az alábbi kijelentésekkel:
A folyadék belsejében lévő vízszintes felületre kifejtett nyomóerő nem függ a felület felett lévő folyadék mennyiségétől, hanem csak a folyadék sűrűségétől, a felület felszín alatti mélységétől, a felület nagyságától és a gravitációs állandótól függ. ($F = P \cdot A = h \cdot \rho \cdot g \cdot A$)

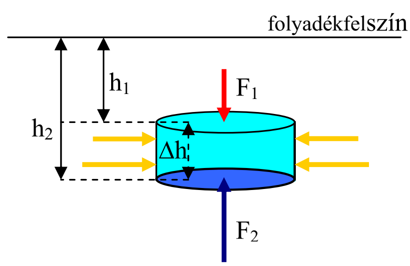
Érvényes a közlekedőedények elve.

5. A előző feladatok megoldása alapján indokold a folyadékok nyomására vonatkozó $p = h \cdot \rho \cdot g$ összefüggés általános voltát! Ismertesd a közlekedőedények elvét, mutass be egy példát az elv alkalmazására és egyet a természetben való megnyilvánulására.

Tapasztalataink szerint egy folyadékba merített testre felhajtóerő hat. Ez az erő megnyilvánulhat abban, hogy a test, miután lenyomtuk a folyadékba és elengedtük, elindul felfelé, azaz a felhajtóerő meghaladja a test súlyát; vagy megnyilvánulhat abban is, hogy a testet kisebb erővel lehet a folyadék belsejében egyensúlyban tartani, mint a folyadékon kívül.
A felhajtóerő oka, hogy a testre az őt körülvevő közeg nem egyenletes nyomást gyakorol. A nyomás alulról nagyobb, mint felülről. Felhasználva a folyadékok súlyából származó nyomásnak korábban tárgyalt összefüggését ($P = h \cdot \rho \cdot g$), valamint azt a tényt, hogy a testet körülvevő folyadék minden irányból nyomást gyakorol a testre, egy szabályos test (henger) esetében meghatározzuk a felhajtóerőt.

Az oldalnyomásból származó erők kiegyenlítik egymást.

6. Az ábra alapján határozd meg az F_1 és F_2 értékét, s a $F_{fel} = F_1 - F_2$ erőt. A felhajtóerő kifejezését alakítsd úgy, hogy abban a test $V = A \cdot \Delta h$ térfogata szerepeljen!



A felhajtóerő kapott összefüggését vizsgálva megfogalmazható Arkhimédész törvénye. A folyadékba merített testekre felhajtóerő hat, melynek nagysága megegyezik a test folyadékba merült részének térfogatával megegyező folyadék súlyával. (Felhajtóerő a gázokba merülő testekre is hat, de ezzel a kérdéssel most nem foglalkozunk.)

Ismert (de hibás) változata az Arkhimédész-törvénynek a következő versike:
Minden vízbe mártott test
A súlyából annyit veszt,
Amennyi az általa
Kiszorított víz súlya.

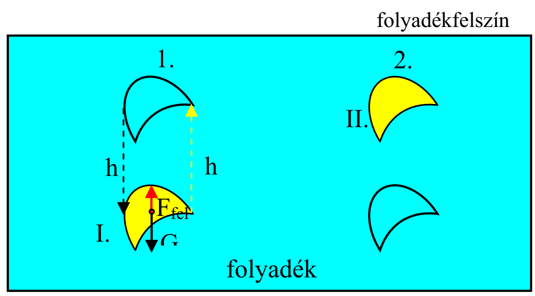
7. Miért pontatlan és hibás a versike? Találd meg a hibahelyeket!

a. A felhajtóerő nagyságára vonatkozó törvény levezetése erősen épített arra, hogy a test (henger) szabályos: a folyadékfelszínnel párhuzamos és arra merőleges felületei vannak. Az alábbiakban a munkatétel felhasználásával egy általános levezetést mutatunk be.

Némi segítséggel a levezetést magad is megtalálod!

8. A felhajtóerő kiszámítása munkatétellel:

Az ábrán sárga színű szabálytalan test merül folyadékba. A testre az I. ábrának megfelelően nagyobb súlyerő hat, mint felhajtóerő.

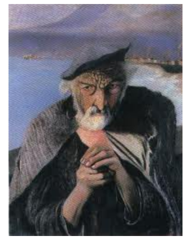


a. Mekkora erővel lehet a testet egyensúlyban tartani?
b. Mekkora erővel lehet a testet egyenletesen felfelé mozgatni?
c. Mekkora munkát végzünk, miközben a testet *h*-val megemelve egyenletesen az I. helyzetből a II. helyzetbe hozzuk?
d. Mennyit nőtt eközben a test helyzeti energiája?
e. Változott-e a folyamatban az edényben lévő folyadék (világoskék) helyzeti energiája?
f. Nőtt vagy csökkent? Mennyi az energiaváltozás?
g. Mennyi a rendszer teljes energiaváltozása?
h. Mennyi a rendszeren végzett munkánk?
i. Írd fel a megfelelő egyenletet és határozd meg belőle a felhajtóerő értékét!

A fenti levezetésben nem használtuk ki a test geometriájának sajátságait.

S végül nézzünk egy ördögi feladatot:

A halász pipája, avagy fény derül a rejtélyre



A képen lévő halászt Csontváry Kosztka Tivadar festette. A halásznak valamikor volt két pipája. De mi történt azután?

A halász a pipákat a tóba dobta. Talán le akart szokni a dohányzásról? A következőket tudjuk a pipák elvesztésének körülményeiről:
A halász az egyik pipáját a partról dobta bele a tóba. A másikat akkor hajította ki, amikor a csónakjában ülve éppen a tó közepén várta a kapást. A vízszint mindkét esetben ugyanannyit változott! A tó partfala mindenütt függőleges☺!

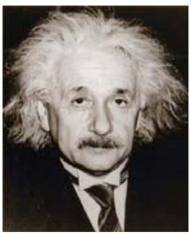
Mekkora a pipa sűrűsége?

9. Oldjuk meg együtt a feladatot lépésenként, rávezető kérdések segítségével!

a. Hogyan változik a tó vízszintje, ha a halász a partról bedobja a tóba a pipáját?
b. Mennyiben befolyásolja a változást az a tény, hogy a pipa elsüllyed a tóban vagy úszik?
c. Mennyi vizet szorít ki a pipa az első, illetve a második esetben?
d. Mennyi vizet szorít ki a pipa, ha a halász csónakjában van?
e. Mennyivel változik a vízkiszorítás, ha a pipa kiesik a csónakból, és elsüllyed a tóban?
f. Mennyivel változik a vízkiszorítás, ha a pipa kiesik a csónakból, és úszik a tó felszínén?
g. Ha eddig eljutottál, lehetséges, hogy valamilyen ellentmondást észlelsz! Ezt feloldhatja, ha végiggondolod: Mit is jelent az, hogy a két esetben *a tó vízszintje ugyanannyit változik*?
h. Ha rájöttél a trükkre, innen hamar eljutsz a megoldásig! Akkor elsüllyed a pipa a vízben vagy úszik?
i. Tehát akkor mely mennyiségek egyenlők? Szavakkal fogalmazd meg, ne képlettel!
j. Mekkora a pipa sűrűsége?

A speciális relativitáselmélet

Galilei relativitási elve szerint két, egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerben (Galileinél egy álló és egy egyenletesen mozgó hajó szerepelt) a testek mozgásait, az ezt kiváltó erők és a mozgás jellemzőinek viszonyát azonos törvények írják le, azaz a két rendszer nem különíthető el egymástól pusztán a testek mozgásának (viselkedésének) megfigyelése révén. Einstein általánosította Galilei relativitási elvét, s kimondta, hogy két, egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerben a fizikai törvények és a fizikai állandók egyaránt azonosak.
A relativitási elv Einstein-féle általánosításának következménye, hogy a fény légüres térben mért sebessége, mint alapvető fizikai állandó, független a vonatkoztatási rendszertől.



Az Einstein által kidolgozott speciális relativitáselmélet a következő állításokat fogalmazza meg a fényre:

- A fény légüres térben mérhető sebessége egyfajta határsebesség, semmilyen információ nem terjedhet ennél gyorsabban.
- A fény légüres térben mérhető sebessége vonatkoztatási rendszertől független állandó, azaz az egymáshoz képest mozgó megfigyelők egy fényjel sebességét azonosnak tapasztalják.

A sebességek összeadásának nehézségei
A sebességek összeadhatóságának klasszikus módszerét Galilei adta meg. Ennek a szemléletes elvnek a lényege, hogy ha egy vonatkoztatási rendszer hozzánk képest egy egyenes mentén v_{rel} relatív sebességgel mozog, s ebben a rendszerben egy test sebessége v_1 ugyan-ezen egyenes mentén ugyanabban az irányban, akkor a test sebessége hozzánk képest $v_2 = v_1 + v_{rel}$ lesz. Tehát ha egy száguldó vonaton előre világítunk, akkor a klasszikus sebesség-összeadási elv szerint lámpánk fénye a fény légüres térben mért sebességénél nagyobb sebességgel terjed a sínekhez képest. A relativitáselmélet érvénytelenítette a klasszikus sebesség-összeadási képletet. A helyes, relativisztikus összefüggés fenntartja a fénysebesség határsebesség jellegét, kis sebességek esetén pedig visszaadja a klasszikus formulát. A képletben szereplő mennyiségek egy egyenes mentén való mozgásra vonatkoznak.

$$v_2 = \frac{v_1 + v_{rel}}{1 + \frac{v_1 \cdot v_{rel}}{c^2}}$$

Ebben a képletben a két megfigyelő v_{rel} sebességgel mozog egymáshoz képest. v_1 a mozgó test sebessége az egyik, v_2 a másik megfigyelő szerint. A c a fénysebességet jelöli.

1. **Számold ki v_2 értékét abban az esetben, amikor $v_1 = 72$ km/h, $v_{rel} = 108$ km/h!**
   A fény sebessége 300 000 km/s. Mennyivel tér el az eredmény a klasszikus Galilei-féle képletből kapható 180 km/h = 50 m/s-tól?
2. **Végezd el a számítást akkor is, ha 72 km/h sebességgel haladó vonaton fénysebességgel világítunk előre! Mekkora lesz a fény sebessége a sínekhez képest?**
3. **Mekkora lesz v_2 értéke, ha $v_1 = 250\,000$ km/s, $v_{rel} = 200\,000$ km/s?**

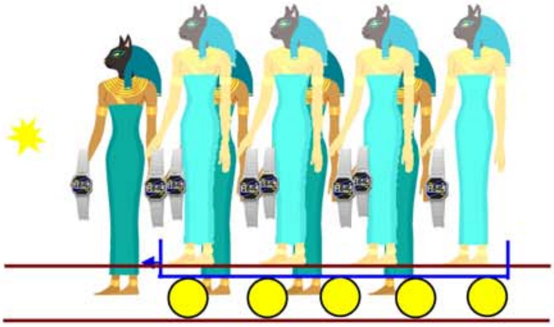
A klasszikus fizika leírása szerint két tetszés szerinti esemény között eltelt idő és a megtörténtük helye közötti távolság független a megfigyelőktől. Azaz míg az időpont és a hely valamilyen viszonyítási ponthoz képest értelmezhető (pl.: Krisztus születése, a kiválasztott koordinátarendszer origója), addig két esemény *között* eltelt idő vagy két esemény helye közötti távolság már a megfigyelőtől független. Einstein fénysebességre vonatkozó alapfeltevései ennek a klasszikus képnek a megváltoztatására kényszerítenek. Ezek lényege, hogy sem a két esemény között eltelt idő, sem a két esemény helye közötti távolság nem független a megfigyelőtől. Mindezt megérthetjük, ha átlátjuk az egyidejűség problémáját.

Az órák szinkronizálása

Két, egymáshoz képest mozgó megfigyelő óráinak szinkronizálása korántsem egyszerű feladat. Hogyan állapítható meg, hogy kinek jár pontosan az órája, és kinek siet vagy késik? A speciális relativitáselmélet szerint nem dönthető el, hogy az egymáshoz képest egyenletesen mozgó megfigyelők órái közül melyik jár pontosan. Nem értelmezhető tehát az abszolút idő, a megfigyelőknek (a vonatkoztatási rendszereknek) saját idejük van. Ez két esemény vonatkozásában azt jelenti, hogy egyidejűségük relatív.

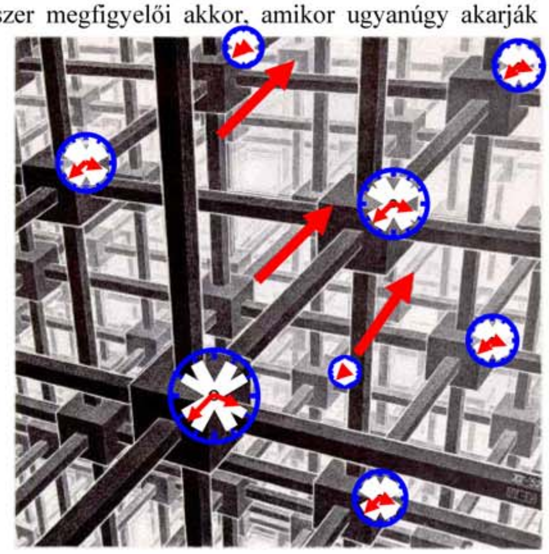
Miből következnek ezek a kijelentések? Vizsgáljuk meg az órák szinkronizálásának problémáját!

Tételezzük fel, hogy tőlünk balra és jobbra egy egyenes mentén megfigyelők állnak, akiktől azt várnánk el, hogy óráik ugyanúgy járjanak, mint a miénk. Előre eldönthetjük, hogy az órák egyeztetését egy fényjel segítségével fogjuk végezni. Ez a fényjel ott fog felvillanni, ahol mi vagyunk, merthogy ott hozunk létre egy fényfelvillanást. A fényfelvillanás pillanata lesz a nulla óra nulla perc a mi világunkban. Mivel tisztában vagyunk azzal, hogy a fény terjedéséhez idő kell, ezért a tőlünk balra és jobbra 100 méterre lévő megfigyelőket figyelmeztetjük, hogy óráikat ne nullára állítsák, hanem annyival állítsák előre, amekkora időre van szüksége a fénynek ahhoz, hogy 100 méter utat megtegyen. Amikor meglátják a fényjelet ezek a megfigyelők, akkor kell majd elindítaniuk a már jó előre beállított óráikat, így az ő óráik és a mi óráink együtt járása biztosított. Természetesen a tőlünk 200-300 méterre lévő megfigyelők távolságuknak megfelelően még jobban előre kell hogy állítsák óráikat, hiszen hozzájuk a szinkronizáló fényjel később érkezik meg. Ezzel a módszerrel nagy biztonsággal szinkronizálhatjuk egy egyenes mentén elhelyezkedő rendszerünk összes óráját!
Képzeljünk el most egy másik rendszert, amelyhez szintén egy egyenes mentén elhelyezkedő megfigyelők sokasága tartozik! Helyezkedjenek el ezek a megfigyelők ugyanazon egyenes mentén, mint amely mentén a mi rendszerünk megfigyelői elhelyezkedtek! Mozogjon ez a rendszer hozzánk képest állandó sebességgel a közös egyenesünk mentén! Úgy is elképzelhetjük ezt, mint egy végtelen hosszú vonatot, amely egy végtelen hosszú sínen halad. A mi rendszerünk a sín mellett állók gyülekezete, a hozzánk képest mozgó rendszer a vonaton lévők csapata.



A hozzánk képest mozgó megfigyelők rendszere a mi eljárásunkat követve próbálja óráit szinkronizálni. A fényfelvillanás pillanatában rendszerük középpontja a fényfelvillanás helyén, azaz a mi rendszerünk középpontjában van. A mozgó rendszer középpontjától jobbra és balra ugyanúgy előre állították már korábban az órákat, ahogy ezt mi is megtettük a szinkronizálás előkészületei során. A mozgó rendszer óráit is ugyanaz a fényjel fogja elindítani, mint az állóét.

Vajon helyesen járnak el a mozgó rendszer megfigyelői akkor, amikor ugyanúgy akarják szinkronizálni óráikat, ahogy ezt mi, állók korábban felvázoltuk? Joggal feltételezhetjük, hogy a mozgó rendszer megfigyelői hibát követnek el, hiszen az ő óráik mozognak. A felénk közeledő óráik előbb indulnak el a kelleténél, hiszen szembejönnek a fényjellel, a tőlünk távolodó órák pedig később indulnak el, hiszen azok távolodnak a fényfelvillanás helyétől, s így beindításukig nagyobb utat kell megtennie a fénynek, mint ha állnának. Azaz a közeledő órák valójában sietnek, annál jobban, minél messzebb vannak tőlünk, a távolodók meg késnek, szintén távolságukkal egyenesen arányos mértékben.



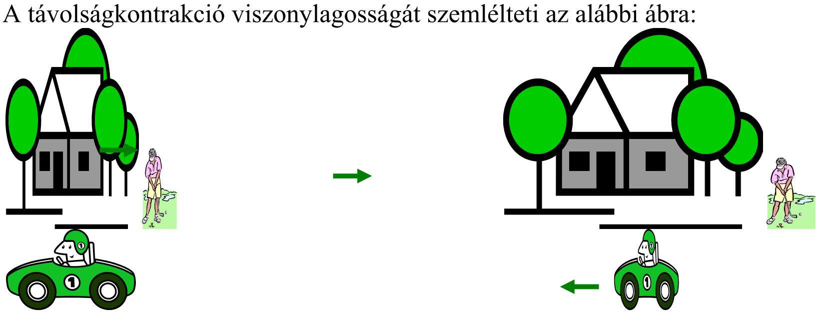
Mivel azonban a nyugalom és a mozgás relatív, semmilyen eljárással nem dönthető el, hogy ki mozog igazából. A hozzánk képest mozgó megfigyelők magukat tekintik nyugalomban lévőnek, s minket mozgónak. Az órákra levont következtetésük azonos, csakhogy nem a saját, hanem a mi óráinkat tartják pontatlannak. Amit biztosan tudunk: hogy az egymáshoz képest mozgó megfigyelők nem fognak egyetérteni abban, hogy kinek járnak szinkronban az órái, azaz az egyidejűség relatív.

Az ábrán látható mozgó rácsrendszer egy nyugvó rácsrendszeren hatol keresztül. A két vonatkoztatási rendszer órái nem járnak szinkronban.

A mozgó megfigyelő órái lassabban járnak. Ezt nevezik idődilatációnak (időmegnyúlás), melynek értéke: $\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v_{rel}^2}{c^2}}$, ahol $\Delta t'$ két olyan esemény között eltelt idő a mozgó rendszerben, melynek időbeli távolsága Δt volt a nyugvó rendszerben.
A mozgó rendszer rúdjai rövidülnek, ezt nevezik távolságkontrakciónak (távolságösszehúzódás), melynek értéke: $\Delta x' = \Delta x \cdot \sqrt{1 - \frac{v_{rel}^2}{c^2}}$, ahol $\Delta x'$ a nyugalomban Δx hosszúságú rúd kiterjedése a mozgó rendszerben.

Persze az továbbra is relatív, hogy ki mozog, tehát a dilatációt és kontrakciót az egymáshoz képest mozgó megfigyelők a másikra vonatkoztatva állapítják meg! Azaz nincs valamiféle „objektív”, „tényleges” lassulás vagy rövidülés.

A távolságkontrakció viszonylagosságát szemlélteti az alábbi ábra:



Ahogy az autós látja a hozzá képest mozgó házat és a golfozót.

Ahogy a golfozó látja a hozzá képest álló házat és a hozzá képest mozgó autóst.

Vizsgáljuk meg az idődilatáció és a távolságkontrakció jelenségét konkrét példákon!

A müonok élete és halála
A müon a légkör magasabb rétegeiben, a Föld felszíne felett kb. 45 km-rel keletkező elemi részecske, amelynek felezési ideje a kísérletek tanúsága szerint 0,0000015 másodperc, azaz ennyi idő alatt bomlik el a müonok fele, újabb 0,0000015 másodperc idő alatt a felének a fele stb.

4. **Közelítőleg hányad része ér földet (nem bomlik el) a közel fénysebességgel a Föld felé tartó müonoknak, ha nem vesszük figyelembe (helytelenül) sem az idődilatációt, sem a távolságkontrakciót?**

(Ha megvizsgálod, mennyi idő alatt érnék el a müonok a Földet, s figyelembe veszed, hogy mennyi idő alatt feleződik a müonok száma, az eredményt könnyen megkaphatod!)

A mérési eredmények ezzel szemben azt támasztják alá, hogy a müonok nyolcad része eléri a Földet. Ezt a tényt úgy tudjuk értelmezni, hogy a nagy sebességgel mozgó müonok ideje annyival lassabban telik, hogy az ő rendszerükben csak három feleződés történt: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, azaz 3 felezési idő, $3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} = 0{,}0000045$ másodperc telt el.

5. A fénysebesség hányad részével tér el a müon sebessége a fénysebességtől?

A müon rendszeréből nézve a Föld mozog nagy (közel fénysebességgel) a müon felé, így a kezdő pillanatban a Föld és a müon között lévő 45 km-es távolság kontrahálódik, azaz összehúzódik. Ebben az esetben az 1/8-nyi müon földet érésének oka nem a müon idejének dilatációja (hiszen a müon rendszerében a Föld ideje dilatálódott), hanem a kezdeti Föld-müon távolság jelentős kontrakciója, vagyis az, hogy a müonoknak kisebb utat kellett megtenniük, mint 45 km.

6. Milyen nagyságúra kontrahálódott a müonhoz rögzített koordinátarendszerben a 45 km-es távolság?

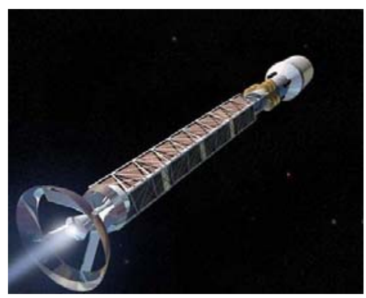
Utazás távoli csillagokba — az idődilatációt kihasználva

7. Mekkora sebességgel kell utaznunk egy űrhajóval ahhoz, hogy az idő az űrhajóban a földiek szerint fele olyan gyorsan teljen, mint a Földön?

Használd az idődilatációra vonatkozó képletet!

8. Milyen messze jut el a Földtől az űrhajónk a földiek szerint, mialatt a Földön 5 év telik el?

Az űrhajó 5 év múlva visszafordul, s ugyanazzal a sebességgel visszatér a Földre.



9. Hány évet öregedett az űrhajó legénysége az út során?

10. Az álló űrhajó hossza 50 méter. Milyen hosszú volt az űrhajó menet közben odafelé és visszafelé a Föld vonatkoztatási rendszerében?

Az űrhajó utasai semmit sem észleltek az idő dilatációjából. Óráik normálisan jártak, biológiai folyamataik ennek megfelelően normális ütemben zajlottak. Mindössze annyi történt, hogy oda- és visszaútjuk során kevesebbet öregedtek, mint a földiek. Mivel ismerték a speciális relativitáselméletet, ezen egy cseppet sem lepődtek meg.

Az űrhajó személyzetéhez tartozott egy fiatal technikus, aki jó eszű, de fizikában kevésbé képzett ember volt. Ő a következő kérdést tette fel visszaérkezéskor:

Mivel egyenletesen mozogtunk űrhajónkkal a Földtől távolodva és a Földhöz közeledve is, akár azt is kijelenthetjük a relativitás elvének megfelelően, hogy mi álltunk, s a Föld mozgott hozzánk képest. Ebben az esetben viszont az ő idejüknek kellett lassabban telnie, s visszaérkezésünk után azt kellett volna tapasztalnunk, hogy a földiek öregedtek kevesebbet. Miért nem ez történt?

Mi a különbség a két vonatkoztatási rendszer között?

11. A technikus logikája szerint mennyi időnek kellett az űrutazás során eltelnie a Földön? Mekkora a két időmérleg különbsége?

12. Saját ötleteidre vagy internetes információkeresésre hagyatkozva oldjad fel a fentebb megfogalmazott ellentmondást, amit egyébként ikerparadoxonnak neveznek! Írj részletes, szöveges magyarázatot!

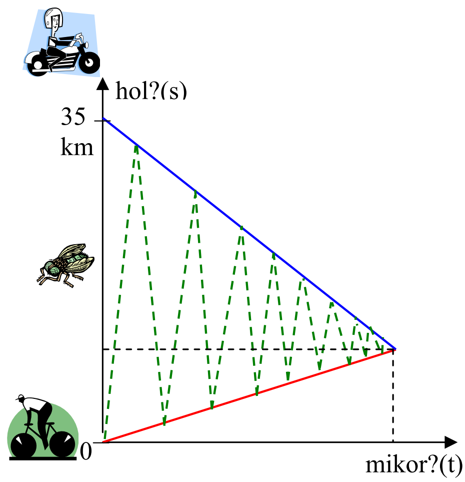


Egyenes vonalú egyenletes mozgás

Az alábbi feladatok megoldása rugalmasságot és ötletességet igényel. A megoldásban segítenek a rávezető kérdések, gondolatok, de egy dolgot mindig tarts a szemed előtt: *Minden nézőpont kérdése!*

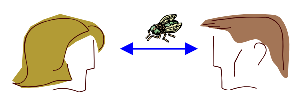
A légy útja

Egy 10 km/h egyenletes sebességgel haladó kerékpáros és egy 25 km/h egyenletes sebességgel haladó motoros egyszerre indul egymás felé. Az indulás pillanatában 35 km távolságra vannak egymástól. A kerékpáros és a motoros között ez idő alatt egy légy repked ide-oda 40 km/h-s sebességgel. A légy a kerékpárostól indul el a motoros felé pontosan akkor, amikor a kerékpáros is elindul, de amint eléri a motorost, visszafordul és visszarepül a kerékpároshoz. Amint újra találkozik a kerékpárossal, megfordul és újra a motoros felé repül, s aztán így repked tovább, amíg a kerékpáros és a motoros találkoznak.



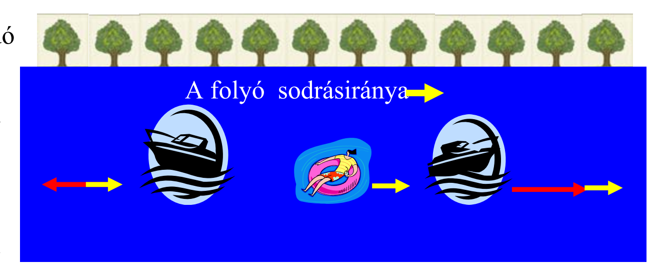
1. **Mikor és hol találkozik a kerékpáros és a motoros?**
2. **Mekkora utat tesz meg a légy a találkozás időpontjáig?**

A grafikonról leolvasható a légy útja. De vajon hány darabból áll ez az út? Az útszakaszok összeadásánál jobban járunk, ha az időre koncentrálunk.



Sodródás a folyón

Egy folyóban sodródó úszóövön egy ember ül. Elhalad mellette két motorcsónak úgy, hogy ellenkező irányból, de egyszerre érnek az emberünkhöz. A motorcsónakok a parttal párhuzamosan haladnak, sebességük állóvízben azonos lenne (a motorteljesítményük azonos). 1 perccel később a csónakok egyszerre megfordulnak és azonos motorteljesítménnyel visszafelé haladva közeledenek a folyóban sodródó emberünk felé.

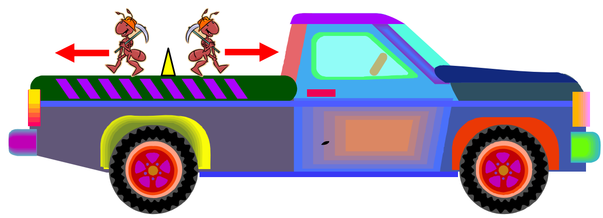


Melyik ér vissza az emberhez előbb?

Az ábra azt mutatja, hogyan alakulnak a sebességek a parthoz képest.

Ám az úszógumin ülő megfigyelő szempontjából minden másképpen néz ki. Ezt a következő ábra mutatja:

Az ábra egy autót mutat, melynek platóján hangyák menetelnek, miközben az autó egyenletesen halad előre. Ha azonos a sebességük és egyszerre haladtak el a sárga ék mellett, s azután egyszerre fordulnak vissza az ék felé, vajon melyik ér vissza előbb az ékhez?



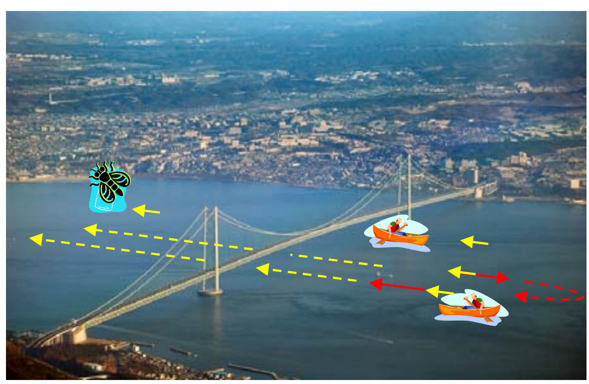
Mi köze van mindennek a folyós feladathoz?

3. Melyik ér vissza előbb?

Válaszodat indokold!

A halász és az elvesztett lélekmelegítő

Egy halász evez a csónakjában a folyón felfelé. Egyszer csak észreveszi, hogy a lélekmelegítőnek szánt itókás üveg kiesett a csónakból. Biztosan a hídnál történt, gondolja, majd megfordul, és az evezés erősségét fenntartva elindul a folyón lefelé. Így a híd alatt 200 m-rel a megfordulást követően 5 perc múlva eléri a palackot.



4. Mekkora a folyó sebessége?

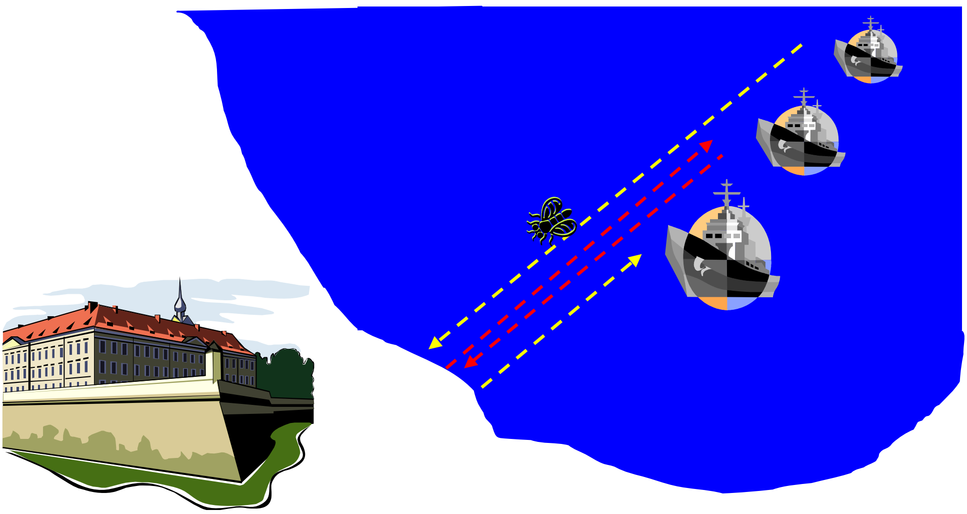
A feladat első pillantásra adathiányosnak tűnik. Hogyan is lehetne megoldani, ha nem tudjuk, mekkora sebességgel evez a halász!

De a helyzet korántsem ilyen reménytelen. A palackra rászállt egy légy, s amit a légy lát, nagy segítség lehet mindnyájunknak!

A légyradar

Egy megfelelően idomított légy akár radarnak is használható. A hajó közeledik a part felé. A hajóról a légy elrepül nyílegyenesen a partig, majd visszarepül a hajóra, ezután megállás nélkül újra a part a cél, majd megint a hajó. A légy az első oda- és visszautat 35 perc alatt tette meg, a második oda- és visszaútra elegendő volt 25 perc. A légy sebessége 30 km/h.

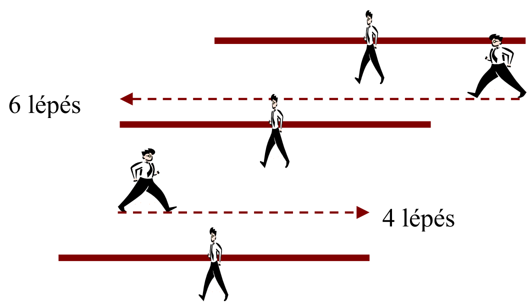
5. **Mekkora a hajó sebessége? Hol volt a hajó kezdetben, s hol a második légyrepülés után?**



Mekkora utat tett meg a hajó azalatt, mialatt a légy kétszer megfordult? Ha figyelmesen szemléled az ábrát, erre könnyen rájöhetsz! A többi már gyerekjáték!

A rúd hossza

Egy ember visz egy rudat. Egy másik gyors léptekkel elhalad mellette, s 6 lépést megtéve a rúd végétől az elejéig ér. Azután nyomban megfordul, s 4 lépést megtéve visszajut a rúd mozgásával szemben haladva az elejétől a végéig.

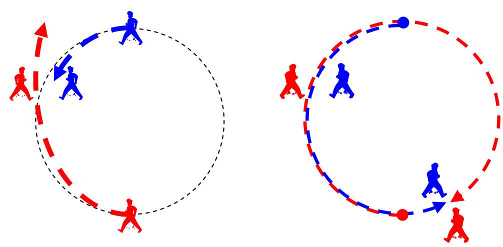


6. **Hány lépésnek találná a rudat, ha a rúd állna?**

Vajon mit jelent a „lépés” kifejezés ebben a feladatban? Távolságot? Időt? Mindkettőt? Mennyit ment előre a rúd, mialatt emberünk a végétől újra a végéig ért? Mennyit halad előre a rúd gyorsléptű emberünk minden lépése során?

Körben, szemben

Két ember körpályán, két átellenes pontból indulva szemben halad. 2 perc múlva találkoznak, elmennek egymás mellett, majd találkoznak megint.

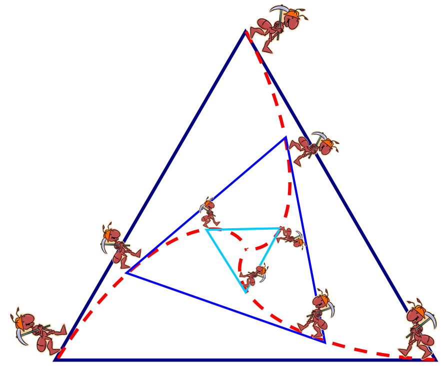


7. **Mennyi idő múlva következik be a második találkozó?**

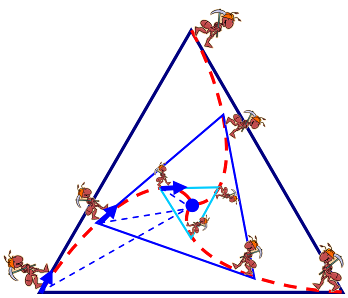
A rajz sokat segít!

Hangyák találkozója

Egy 50 cm oldal élű egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban 3 hangya csücsül. Majd egyszerre elindulnak egymás felé 1 cm/s sebességgel oly módon, hogy mindegyik hangya baloldali szomszédja felé tart folyamatosan.



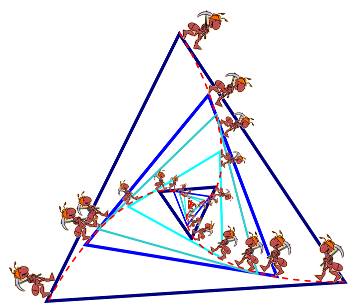
8. **Mennyi idő múlva, s mekkora út megtétele után találkoznak a háromszög közepében?**



A hangyák útját a rajzon piros, szaggatott vonal jelöli. Hangyák nem kicsinyednek persze útközben, de így érdekesebb a rajz ☺! A hangyák mozgásiránya mindig változik. Sebességük állandó, s állandó sebességgel közelednek a háromszög középpontja felé.

9. **Mekkora ez a sebesség?**

10. **Mekkora utat kell megtenniük a középpont irányába, hogy megérkezzenek?** Ha a hangyák világa abban az ütemben zsugorodna, amilyen ütemben a hangyák közelednek egymáshoz (vagyis a hangya-mértékegységek is zsugorodnának), akkor a hangyák egy *hangyányival* sem kerülnének közelebb egymáshoz! ☺



Gravitációs tér és elektromos tér összehasonlítása

Ha két különböző jelenségkört azonos szerkezetű törvények írnak le, akkor az egyik jelenségkörben elsajátított trükköket a másik jelenségkörben is alkalmazhatjuk. Ez még akkor is megoldható, ha a két jelenségkörben némileg eltérő fogalomrendszert használunk.

Gravitációs vonzó erő	Elektrosztatikus kölcsönhatási erő
Általános tömegvonzás törvénye $\lvert F\rvert = f\dfrac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$ ahol f a gravitációs állandó. $f = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$ m a pontszerűnek tekinthető test tömege, R a két tömegpont távolsága. A gravitációs erő mindig vonzóerő. Az erő mindig a két pontszerű testet összekötő egyenes mentén hat.	Coulomb törvény $\lvert F\rvert = k\dfrac{q_1 \cdot q_2}{R^2}$ ahol k a Coulomb állandó. $k = 8.99 \cdot 10^9\ \dfrac{Nm^2}{C^2}$ q a pontszerűnek tekinthető test töltése, R a két töltött test távolsága. Az elektrosztatikus kölcsönhatást leíró erő azonos előjelű töltések között taszító erő, különböző előjelű töltések között vonzóerő. Az erő mindig a két pontszerű testet összekötő egyenes mentén hat.

1. **Hasonlítsd össze két elektron között fellépő gravitációs vonzóerő és elektromos taszítóerő nagyságrendjét!**

$m_e = 3 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$; $q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

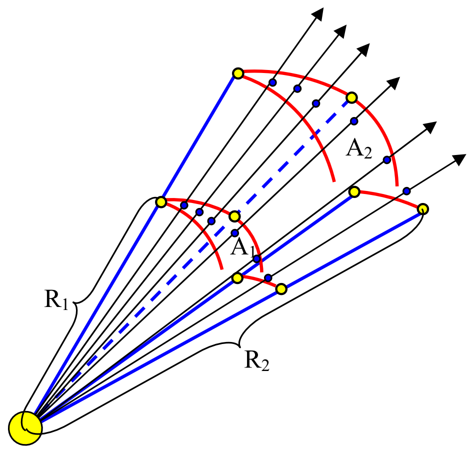
Gravitációs tér (mező)	Sztatikus elektromos tér (mező)
Egy test környezetében gravitációs tér jön létre. Ezt a teret egy egységnyi próbatömeg segítségével tudjuk feltérképezni. Az adott test gravitációs terének erősségét a test környezetében elhelyezett egységtömegre ható erő adja meg. $\lvert E_g\rvert = \dfrac{\lvert F\rvert}{m} = f\dfrac{M}{R^2}$ ahol m a próbatömeg nagysága, M a gravitációs teret létrehozó tömeg.	Egy töltés környezetében elektromos tér jön létre. Ezt a teret egy egységnyi próbatöltés segítségével tudjuk feltérképezni. Az adott töltés elektromos terének erősségét a töltés környezetében elhelyezett egységtöltésre ható erő adja meg. $\lvert E\rvert = \dfrac{\lvert F\rvert}{q} = k\dfrac{Q}{R^2}$ ahol q a próbatöltés nagysága, Q a teret létrehozó töltés.

A gravitációs térerősség, mint egységnyi tömegre ható erő, a gravitációs gyorsulásnak felel meg. Mértékegysége: $\dfrac{m}{s^2}$.

Gravitációs tér (mező)	Sztatikus elektromos tér (mező)
A gravitációs tér jellemzésére erővonalakat használunk. A térerősség irányát egy adott pontban az erővonalakhoz húzott érintő iránya határozza meg, nagyságáról az erővonalak sűrűsége árulkodik.	Az elektromos tér jellemzésére erővonalakat használunk. A térerősség irányát egy adott pontban az erővonalakhoz húzott érintő iránya határozza meg, nagyságáról az erővonalak sűrűsége árulkodik.

Az ábra segítségével megmutatható, hogy az egységnyi felületre jutó erővonalszám úgy csökken a pontszerű töltés vagy kisméretű test környezetében a távolság függvényében, ahogy a térerősség függ a távolságtól.
Az A_1 felület az R_1 sugarú gömb felületének éppen ugyanakkora hányada, mint az A_2 felület a R_2 sugarú gömb felületének.
Így felírható a következő összefüggés:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$



Mivel az A_1 és A_2 felületen áthaladó erővonalak száma azonos N (hiszen minden erővonal átmegy minkét felületen), ezért a felületegységre jutó erővonalszám a két esetben a következőképpen alakul:

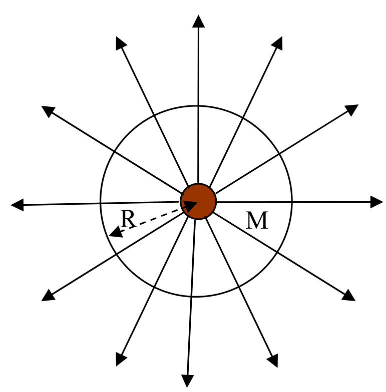
$$\frac{\frac{N}{A_1}}{\frac{N}{A_2}} = \frac{k\frac{Q}{R_1^2}}{k\frac{Q}{R_2^2}}$$

azaz a térerősség egyenesen arányos a felületegységre jutó erővonalszámmal.
Levezetésünk egy gömbszimmetrikus ponttöltés terére vonatkozik, de általános érvényű.

2. **Felhasználva az $E = k\frac{Q}{R^2}$ összefüggést, határozd meg, hogy mekkora legyen a Q töltésből kilépő erővonalak száma, hogy a felületegységre jutó erővonalszám éppen egyenlő legyen a térerősség nagyságával!**

Végezzük el a levezetést a gravitációs térre:

$$\frac{N}{4R^2\pi} = f\frac{M}{R^2} \Rightarrow N = 4\pi \cdot fM$$

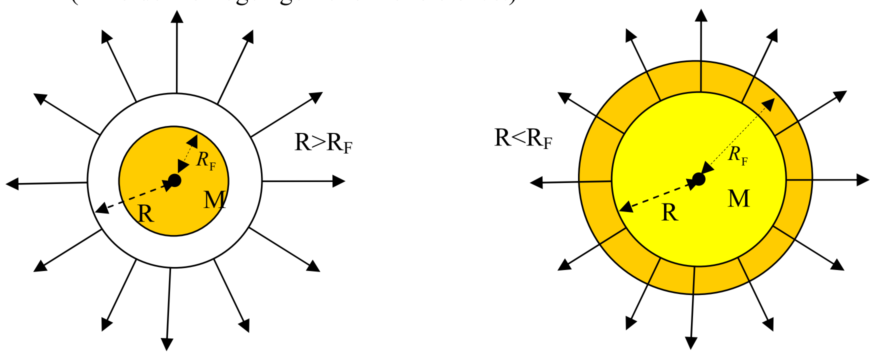


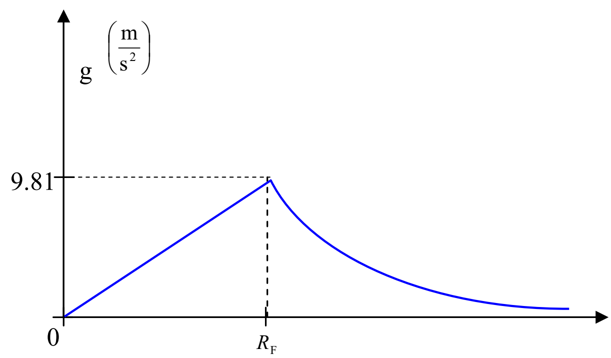
A fenti logika alapján, némi bátor általánosítással kijelenthető, hogy a felületegységre jutó erővonalszám számszerűen is megadja a térerősséget (akár elektromos, akár gravitációs térről van szó), amennyiben az előző két esetben meghatározott számú erővonal indul ki a tér forrásából (ami az elektrosztatikus térben a töltés, a gravitációs térben a tömeg).
Ha egy térrészt olyan felülettel veszünk körül, amelynek mentén a térerősség állandó nagyságú, az erővonalak a felületre merőlegesek. Mivel a felületen áthaladó erővonalak összes száma meghatározható a körülvett térrészben lévő anyag tömegéből, a felület mentén a térerősség nagysága meghatározható.

3. **Mit állíthatunk egy *Q* töltéssel feltöltött szabályos fémgömb elektromos terének nagyságáról a gömbön kívül?**

A Föld gravitációs tere a Föld felszínén kívül és belül

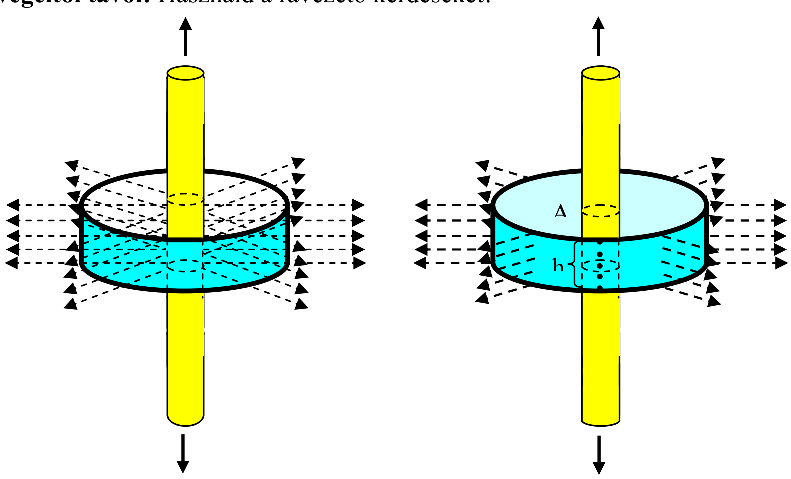
4. Az alábbi két ábra elemzésével igazold, hogy a gravitációs tér a Földön belül és kívül a lap alján látható függvény szerint alakul!
(A Földet homogén gömbnek feltételezve.)





Gravitáció a „ceruzabolygó" környezetében

5. A felületegységre jutó erővonalszám meghatározásával állapítsd meg, hogy hogyan függ a gravitációs tér a tengelytől vett távolságtól a „ceruzabolygó" környezetében, a rúd végeitől távol! Használd a rávezető kérdéseket!



Feltételezve, hogy a ceruzabolygó két végétől elég távol vagyunk, az erővonalakat a rúd felületére merőlegesnek tekinthetjük.

- Hány erővonal lép ki a rúdnak a hengerrel körülvett darabjából?
- Szimmetria okokból a henger palástja mentén a gravitációs térerősség állandó. Mekkora a felületegységre jutó erővonalszám, azaz a gravitációs térerősség?
- Hogyan függ ez az érték a rúd középvonalának távolságától?

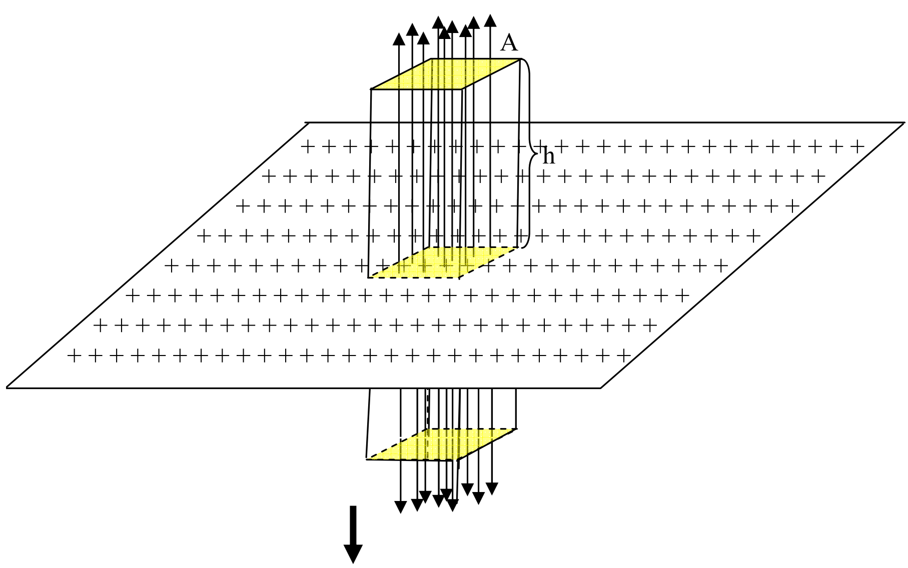
Keringés a ceruzabolygó körül

Tételezzük fel, hogy a ceruzabolygó körül egy űrhajó kering a rúd tengelyére merőleges síkban. A körpályára az űrhajót a rúd gravitációs vonzása kényszeríti.

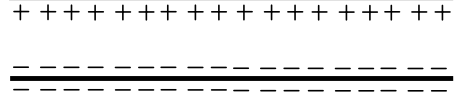
6. **Írd fel a körmozgás dinamikai feltételét!**
7. **Határozd meg a mesterséges hold sebességét, majd a keringési idejét a rúdbolygó tengelyétől vett távolságának függvényében!**
   (Kepler 3. törvénye rúdbolygóra.) Milyen érdekességet vehetünk észre?

Elektromos tér végtelen, töltött síklap környezetében

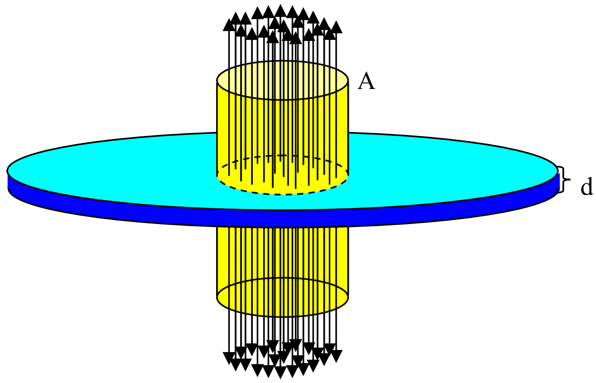
8. $\sigma\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right]$ **felületegységre jutó töltéssűrűséget feltételezve az ábra segítségével határozd meg a töltött síklap széleitől távol, a síklap felett *h* magasságban az elektromos térerősséget! Igazold, hogy a fenti feltételek mellett a tér homogén!**
   - Határozd meg a kilépő erővonalak számát a felület és a felületi töltéssűrűség segítségével!
   - Vegyed észre, hogy az erővonalak két irányban lépnek ki a síkból!



9. **Milyen egy síkkondenzátor elektromos tere a kondenzátorlemezek széleitől távol, ha a síkkondenzátor**



két, egymástól *d* távolságra lévő, azonos felületi töltéssűrűségű, pozitív, illetve negatív töltésű síklemezként írható le?

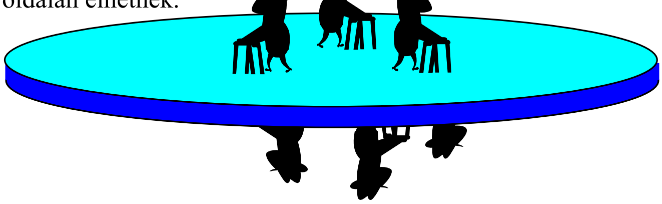


Ha a Föld egy lapos korong volna

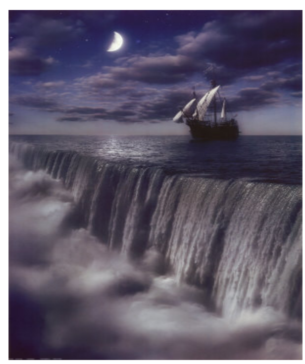
Mekkora lenne a gravitációs gyorsulás a Föld felszínén, ha a Föld egy lapos korong volna?

Az eredményt a széléktől távol vizsgáljuk, s tételezzük fel, hogy a lapos Föld átlagos sűrűsége az általunk lakott Föld sűrűségével azonos!

Mint láthatjuk, a lapos korong Föld felszíne felett a gravitációs tér homogén a széléktől távol. A *„g”* érték tetszés szerinti távolságra a korong felületéről (de még mindig a széléktől távol) mindkét oldalon azonos. Az emberek a korong mindkét oldalán élhetnek.

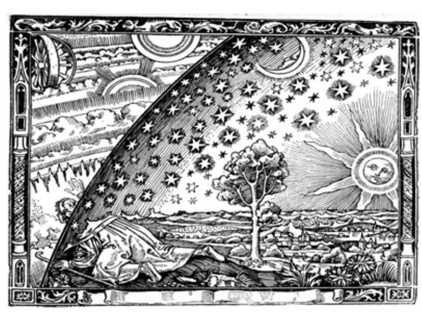


10. Mekkora legyen a *d* vastagság, hogy a korong Föld széléktől távoli részein a gravitációs gyorsulás *(g/10)* = 0,981 $\frac{m}{s^2}$ legyen? (A Föld átlagos sűrűsége 5515 kg/m^3.)



11. Mit ábrázol a középkori metszet?

Ismertesd azt a korai csillagászati elképzelést, amely megfelel a rajznak!

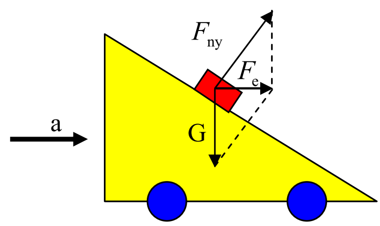


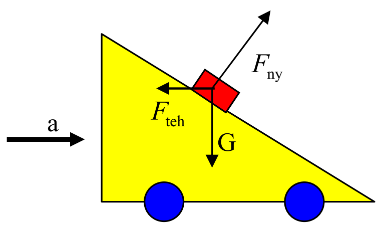
Tehetetlenségi erők
(Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás)

Ha egy buszon utazunk, s az hirtelen fékez, előreesünk. Olyan, mintha egy erő taszítana minket előre ilyenkor. Kívülről, az út mellől nézve a következő történik. A buszt egy erő lefékezte, mi pedig a buszban azért estünk előre, mert mozgásállapotunkat megőriztük. Mivel ránk nem hatott fékezőerő (hacsak nem „erősítettük” magunkat a buszhoz a kapaszkodó segítségével).
Az az erő, melyet a fékező buszban érzünk, a gyorsuló rendszer tehetetlenségi ereje. Nagysága $\underline{a}$ gyorsulás esetén $\underline{F} = m\underline{a}$. Iránya ellentétes vonatkoztatási rendszerünk gyorsulásának irányával. A tehetetlenségi erő a gyorsuló vonatkoztatási rendszer sajátereje, amit csak akkor észlelünk, ha a világot ebből a gyorsuló vonatkoztatási rendszerből szemléljük. Kívülről (inerciarendszerből) nézve nem létezik.

Gyorsuló lejtőn nyugalomban lévő test
Oldjuk meg kétféleképpen:

1. **Mekkora gyorsulással mozogjon a lejtő, hogy a rajta lévő test nyugalomban maradjon? A súrlódás elhanyagolható.**

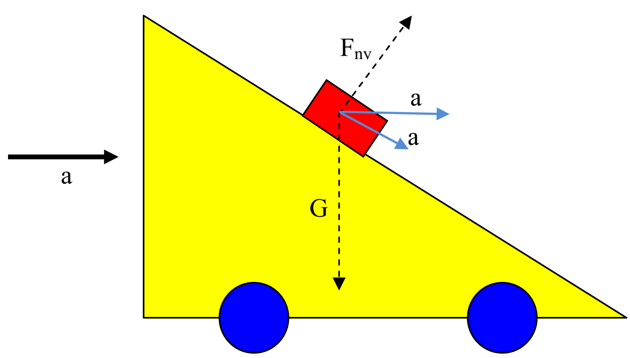




Az első változatban a lejtőn lévő test ugyanúgy vízszintes irányú *a* gyorsulással mozog, mint maga a lejtő. Ebből a feltételeknek megfelelő gyorsulás és a lejtő hajlásszöge (α) közötti kapcsolat határozható meg. Határozd meg a lejtő gyorsulását!

A második változatban a mozgást a lejtőhöz rögzített koordinátarendszerben írjuk fel. Ekkor a lejtőn lévő test nyugalma azt jelenti, hogy a rá ható erők eredője nulla. Igazold, hogy ha az előbbi feltevésből indulunk ki, a gyorsulás értékére az előzővel azonos eredmény adódik!

Gyorsuló lejtőn adott gyorsulással lefelé mozgó test
Amennyiben a test a gyorsuló lejtőn nincs nyugalomban, a problémát hasonlóan vizsgálhatjuk! Tételezzük fel, hogy egy test a gyorsuló lejtőn $\underline{a_t}$ gyorsulással csúszik le! Értelemszerűen $a_t < g\sin\alpha$, azaz a test gyorsulása kisebb, mint a nyugvó, súrlódásmentes lejtő esetében. (Ha $g > a_t > g\sin\alpha$a feladat még megoldható, amennyiben a lejtő az eddigivel ellentétes irányba gyorsul!)



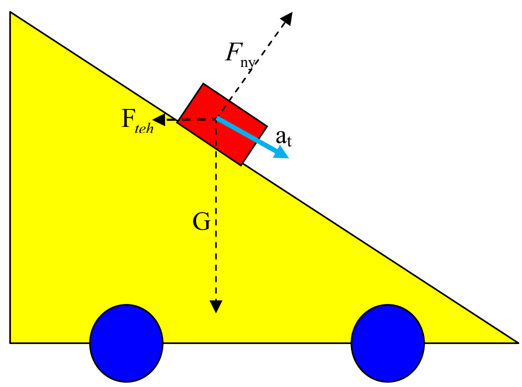
Vizsgáljuk a problémát kívülről (inerciarendszerből) nézve:
A testre továbbra is csak két erő, a gravitációs erő és a nyomóerő hat.
A test gyorsulása egyenlő a lejtő vízszintes gyorsulásának, valamint a test lejtő menti gyorsulásának vektori összegével.
Ha kiszámoljuk a test eredő gyorsulását, az $\underline{a}$ és $\underline{a_t}$ vektorok

összegzésével, nem jutunk közelebb a megoldáshoz!
A probléma szokatlanságát azt jelenti, hogy a gyorsulás-összetevők és az erők rendre nem esik egy egyenesbe.
Tetszés szerinti komponensekre bonthatjuk az erőket és a gyorsulásokat.
Egyaránt ésszerű lehet vízszintes és függőleges komponenst használni (ekkor a $\underline{G}$ és $\underline{a}$ vektorokat nem kell felbontani), vagy lejtővel párhuzamos és lejtőre merőleges komponenseket használni (ekkor az $\underline{F}_{ny}$ és $\underline{a}_t$ vektorokat nem kell felbontani).

Oldd meg a feladatot mindkét változatban, írd fel Newton II. törvényét vízszintes és függőleges, valamint lejtő irányú és lejtőre merőleges koordinátatengelyeket választva!

2. Igazold, hogy a két eredmény azonos!

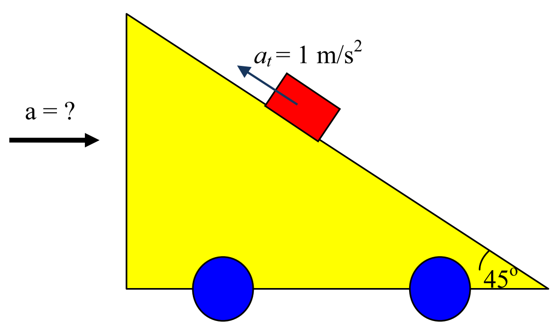
Vizsgáljuk a problémát gyorsuló koordinátarendszerből nézve!
Ebben a változatban háromféle erő hat a lejtőn lévő testre, melynek gyorsulása lejtő irányú.



3. Írd fel Newton II. törvényét lejtő irányú és arra merőleges koordinátatengelyeket alkalmazva! Igazold az előző feladatrészben kapott eredményt!

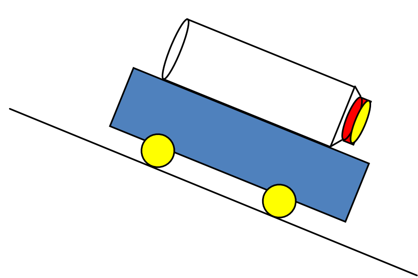
Felfelé a lejtőn
Az előbbi pontban alkalmazott eljárások alapján oldd meg a következő feladatot:

4. Mekkora vízszintes gyorsulással mozogjon az a 45°-os hajlásszögű, kerekekre szerelt lejtő ahhoz, hogy rajta 1 $\frac{m}{s^2}$ gyorsulással felfelé mozogjon egy pontszerűnek tekinthető test?



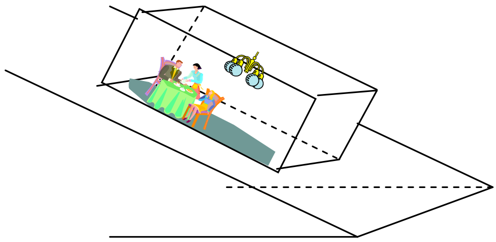
A súrlódás a lejtő és a test között elhanyagolható.
A feladatot akár inerciarendszerből, akár gyorsuló koordinátarendszerből is megoldhatod!

A „lecsúszó” család
Figyeld meg:
Akadálymentesen guruló kiskocsira szerelj kicsi, átlátszó gyógyszeres üveget, melyet félig töltsél meg festékes vízzel! Figyeld meg a vízszint elhelyezkedését, miközben a kiskocsi lecsúszik a lejtőn.

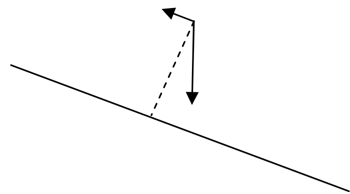


5. Írd le, mit tapasztalsz!

A következő feladatot gyorsuló koordinátarendszerből oldjuk meg!
Egy súrlódásmentes lejtőn ablaktalan lakókonténer csúszik le. A konténerben élő család éppen vacsorázik. Mit észlelnek a lejtőn való gyorsuló mozgásból?



Hogyan helyezkedik el a mennyezetre függesztett lámpa? S a leves a tányérjukban? Mi történik, ha a kisfiú leejti a villáját? Hol ér talajt?



6. Mekkora a lakókonténer gyorsulása a súrlódásmentes lejtőn?
7. Mekkora és milyen irányú tehetetlenségi erő hat ebben a rendszerben?
8. Milyen irányú eredő erő hat a lakókonténerben a lámpatestre és az elejtett villára?

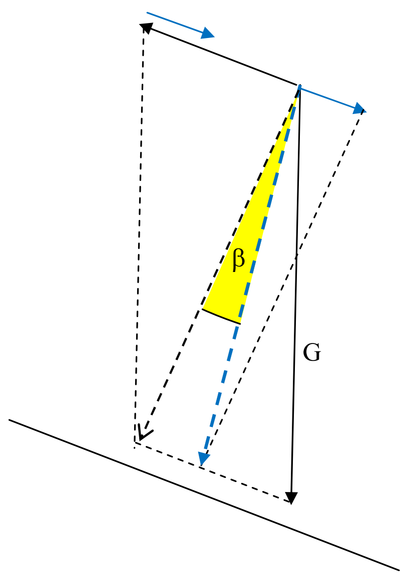
A folyadék vízszintje mindig merőleges a folyadékra ható erők eredőjére.

9. Mit jelent mindez a lecsúszó lakókonténer esetében?

Következtetésedet vesd össze a tapasztalataiddal (vízzel félig telt, kiskocsin leguruló gyógyszeres fiola)!

10. Miben hasonlít és miben tér el a szabadesés jelensége a csúszó lakókonténerben és a normális, külső világban?

A súrlódás nem elhanyagolható!
Hogyan észlelhető a konténer belsejében, ha a csúszás nem súrlódásmentes? (A gyorsulást tekintsük továbbra is egyenletesnek!)
A kérdésre többféle válasz is adható.
Az egyik válasz a következő:
Ekkor a mennyezetre felfüggesztett tárgyak nem állnak „függőlegesen”, azaz a talajra merőlegesen. Az eltérés értékéből a súrlódási együttható a lakókonténer alja és a lejtő között közvetlenül megállapítható!
Vajon hogyan?



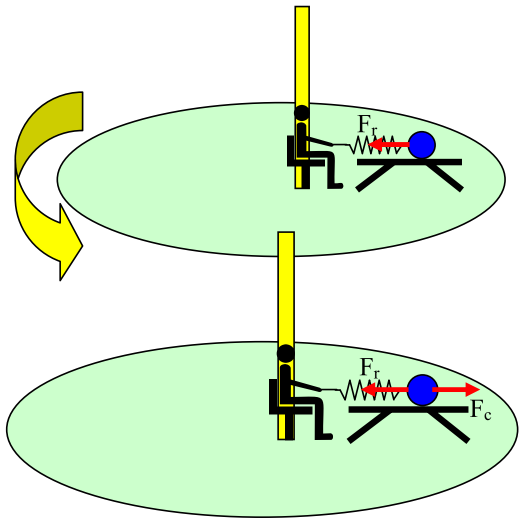
11. Mekkora a konténer gyorsulása, ha a lejtő és a konténer között μ súrlódási együtthatójú súrlódás van?
12. Mekkora a tehetetlenségi erő?
13. Ez az erő mennyivel kisebb, mint a súrlódásmentes állapothoz tartozó tehetetlenségi erő?
14. Mekkora β szögeltérést jelent ez egy felfüggesztett test esetében a súrlódásmentes állapothoz képest?

Az ábra segít a válaszok megadásában!

Ajánlj egy más módszert a súrlódás felismerésére!

Tehetetlenségi erők (Egyenletes körmozgás)

Egy egyenletesen forgó korongon ülő megfigyelő az ábrán látható módon egy rugó segítségével egy golyót tart nyugalomban az asztalon. A rugóban ébredő erőt a rugó megnyúlása mutatja.



1. **Hogyan értelmezzük a rugó megnyúlását, a folyamatot kívülről szemlélve, az egyenletes körmozgás dinamikájának ismeretében?**

A centrifugális erő

A korongon ülő és azzal együtt forgó megfigyelő számára a golyó nyugalomban van annak dacára, hogy a rugóban ébredő erő a középpont felé húzza. Mivel az egyensúly feltétele az erők eredőjének nulla volta, a megfigyelő egy sugárirányban kifelé mutató erőt feltételez, mely az egyenletes körmozgást végző rendszerben nyugalomban lévő testekre hat. Ez a centrifugális erő. Nagysága a rugóerővel egyenlő, azaz

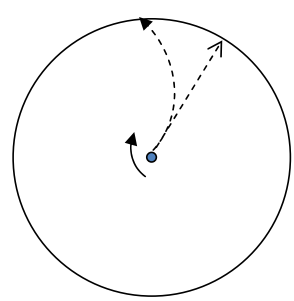
$$F_{cf} = m\frac{v^2}{r}.$$

2. **Honnan tudhatjuk, hogy a rugóerő $F_r = m\frac{v^2}{r}$?**

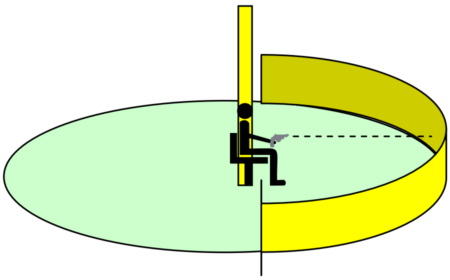
Aki utazott egyenletes körmozgást végző rendszerben, például ült körhintán, megtapasztalta a centrifugális erőt.

3. **Mutasd be, hogyan nyilvánul meg a centrifugális erő a vidámpark valamelyik általunk választott körmozgást végző játékán!**
4. **Értelmezd a súlytalanság állapotát a Föld körül keringő űrhajóból szemlélve!**
5. **Mi történik a centrifugában, hogyan választja el ez az eszköz a ruhát és a benne lévő vizet?**
6. **Számold ki, hogy az Egyenlítő vidékének lakosaira mekkora centrifugális erő hat a Földön, s ez az erő hányad része a testekre ható gravitációs vonzásnak!**
7. **Hogyan értelmezhető az Egyenlítő vidékének lakosaira ható erő kívülről (inerciarendszerből) szemlélve?**

A Coriolis-erő

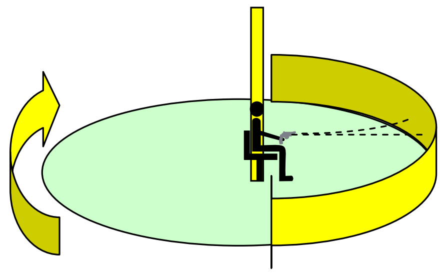


Egy forgó korongra gyors mozdulattal megpróbálunk krétajelet rajzolni úgy, hogy a korongon egyenletesen húzzuk végig a krétát a korong közepétől a korong széle felé, az ábrának megfelelően. Azt fogjuk azonban tapasztalni, hogy a korong forgása miatt a vonal a koronghoz viszonyítva elgörbül, s az ábrának megfelelő görbe krétavonal keletkezik a korongon.



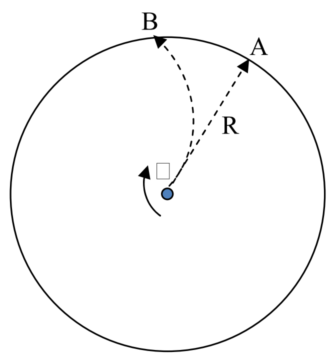
Ha egy korongon ülő, a koronggal együtt forgó kísérletező egy testet a korong széle felé sugárirányban meglök, azt fogja tapasztalni, hogy egyenletes haladás helyett a test oldalirányban eltérül, ahhoz hasonlóan, ahogy az egyenesnek szánt krétavonal is elgörbült a korong forgása miatt. A koronghoz rögzített megfigyelő az egyenletesen haladó testek ezen oldalirányú eltérülését egy, a forgó rendszerben fellépő tehetetlenségi erőnek, a Coriolis-erőnek tulajdonítja.

8. Határozzuk meg a Coriolis-erő nagyságát egy speciális esetben!



A forgó korongon ülő megfigyelő pisztollyal a koronghoz rögzített fal felé lő.
A lövedék nem a pisztolycső irányában csapódik be a falba, hanem attól eltérül a Coriolis-erő miatt. (Legalábbis a forgó rendszerben lévő megfigyelő szerint).

- Ha a pisztoly forgástengelytől vett távolságát elhanyagoljuk, és a fal forgástengelytől vett távolsága R, a rendszer szögsebessége ω, a golyó sebessége v, mekkora a golyó oldalirányú eltérülése?
- Mennyi ideig tart a golyó útja?
- Ez idő alatt mennyit fordult el a korong?
- Mekkora a korong oldalirányú elmozdulása becsapódáskor?



Mivel a golyó repülési idejét kellően kicsinek tekinthetjük, ezért a közben fellépő Coriolis-erő okozta gyorsulás állandónak vehető, és így a megtett út és a gyorsulás kapcsolatának leírására használhatjuk az $s = \frac{a}{2}t^2$ összefüggést. Mivel az s ív – tekintettel a rövid időre – egyenes szakasszal közelíthető, az összefüggés átrendezéséből a Coriolis-erő okozta gyorsulás és így a Coriolis-erő megkapható.

A centrifugális és centripetális erő

Az 1. pontban megismertük a centrifugális erő fogalmát. A centrifugális erő egy egyenletes körmozgást végző rendszer tehetetlenségi ereje, mely a forgó rendszerben nyugalomban lévő testekre is hat. Nagysága $F_{cf} = m\frac{v^2}{R} = mR\omega^2 = mv\omega$, és sugárirányban a rendszer forgási középpontjától kifelé irányul.
A külső szemlélő számára (inerciarendszerből) a centrifugális erő nem létezik, az egyenletes körmozgást végző testet egy, a kör középpontja felé mutató állandó erő kényszeríti körpályára, amely lehet például a nyomóerő a centrifugában, a gravitációs erő a Föld körül keringő űrhajóban vagy nyomóerő és gravitációs erő eredője az Egyenlítőn élő emberek

esetében. Ezt az eredő erőt (melynek oka, kiváltója számos hatás lehet) centripetális erőnek nevezzük. Tehát míg a centrifugális erő egy közvetlenül megtapasztalható erő a forgó rendszerekben, addig a centripetális erő a körmozgást okozó hatások gyűjtőneve inerciarendszerből nézve.

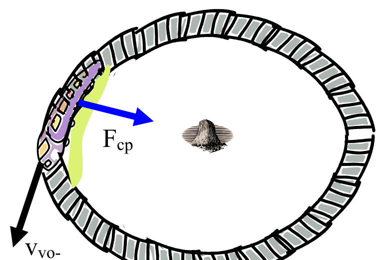
A centripetális erő nagysága $F_{cp} = m\frac{v^2}{R} = mR\omega^2 = mv\omega$, és sugárirányban a kör közepe felé mutat.

Az elmondottakból következik, hogy nézőpontunktól függ, vajon a centripetális vagy a centrifugális erő fogalmát használjuk egy problémában. Ezek egyszerre, egyfajta megközelítést alkalmazva nem szoktak előfordulni.

A Coriolis-erő meghatározása egy szokatlan példa segítségével

Az egyenletes körmozgást végző rendszerekben nyugalomban lévő testekre csak a centrifugális erő hat. Ha egy test mozog az egyenletes körmozgást végző vonatkoztatási rendszerben, akkor egy újabb tehetetlenségi erő, a Coriolis-erő is fellép. Ahogy ezt a 2. pontban kiszámoltuk, a Coriolis-erő a mozgás irányára merőleges, a vonatkoztatási rendszer forgásának irányával ellentétes, nagysága $F_{Cor} = 2mv\omega$.

A következő problémánk egy szikla körül keringő, körpályán haladó vonatról szól.



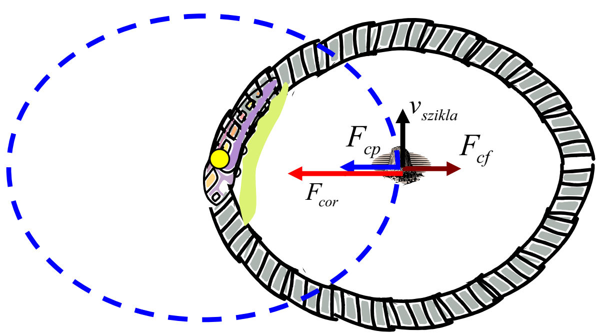
9. Milyen hatás felelős a körmozgásért, azaz mi adja a centripetális erőt ebben az esetben?

Némileg abszurd módon ez a probléma felfogható úgy is, hogy a szikla végez körmozgást a vasúti szerelvényt húzó mozdonyhoz képest, azaz a szikla egy egyenletes körmozgást végző rendszerben végez egyenletes körmozgást úgy, hogy a vasúthoz, mint középponthoz képest iránya és távolsága nem változik. Szemléltetésül képzeljünk el egy hangyát, amint egy forgó lemezjátszó korongjának a szélén éppen akkora sebességgel halad a forgással ellentétes irányba, mint amekkora sebességgel a korong széle forog. Így kívülről nézve a hangya áll.

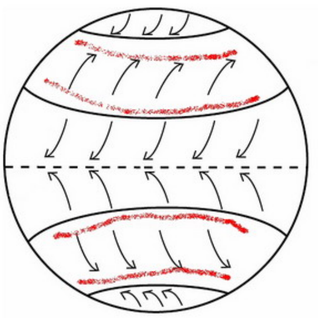
A sziklára nyilván nem hat semmilyen oldalirányú erő, de ez a nulla erő felfogható a körmozgást végző vonatkoztatási rendszerben fellépő tehetetlenségi erők eredőjének is.

10. Hogyan írható le a sziklára „ható” tehetetlenségi erők rendszere ebben a felfogásban?

11. Az ábra segítségével igazold a Coriolis-erő nagyságára kapott korábbi összefüggést!



A Coriolis-erő a mindennapokban



A nagy földi légkörzésben alapvető szerepe van a Coriolis-erőnek.

12. Nézz utána ennek a kapcsolatnak!

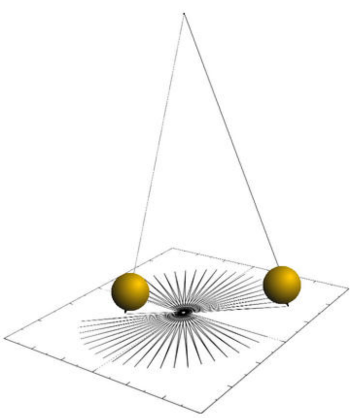
A Foucoult-inga

A Föld forgásának első közvetlen bizonyítékát Foucault ingája szolgáltatta. Az ingát a párizsi Pantheonban függesztették fel.

A párizsi Pantheon

13. Mikor élt Foucault?
14. Mikor épült a Pantheon Párizsban?
15. Melyik orosz város mely székesegyházában függesztettek fel hasonló ingát?
16. Mi található az ingán kívül a Pantheonban?

Az inga lengése során megőrzi lengési síkját. Mivel a Föld közben elfordul, ez a sík a Földhöz képest elmozdul. A Földön álló megfigyelők a lengési sík elfordulását a Coriolis-erőnek tulajdonítják. (Inerciarendszerből nézve csak a Föld fordult el a lengő inga alatt.)
Az inga hegye által kirajzolt vonal függ attól, melyik szélességi körön található az inga.



Jean Foucault (1819-1868)

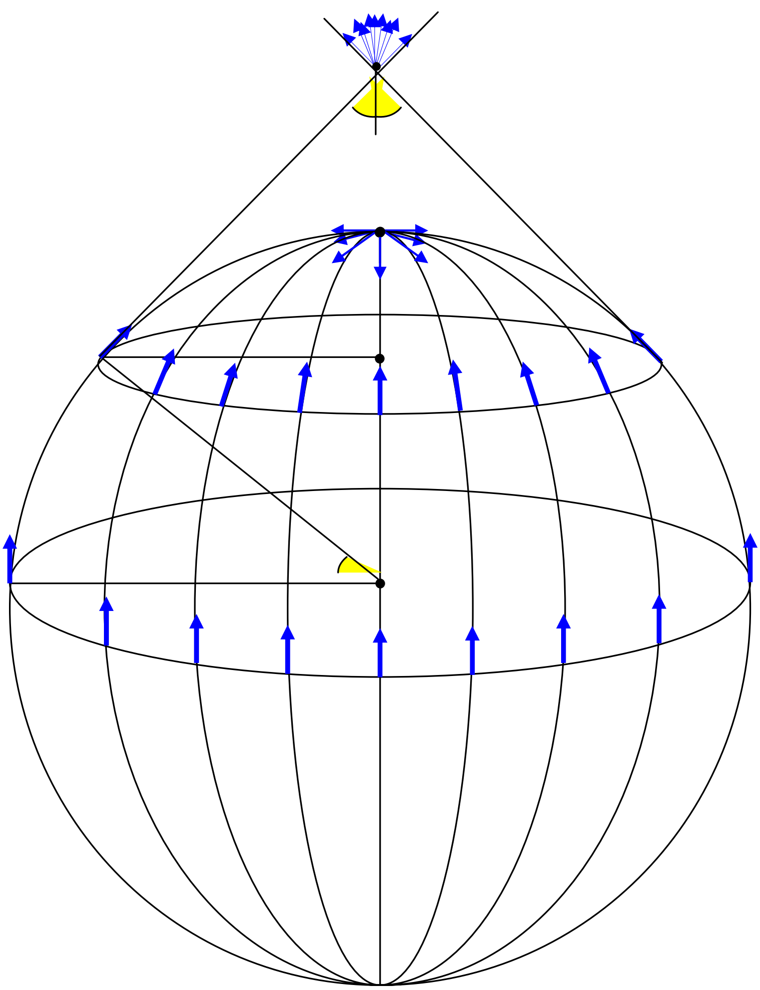
17. Nézz utána Foucault fénysebességmérési eljárásának!

18. Vajon milyen ábrát rajzol ki az inga hegye az Egyenlítőn?

19. Vajon milyen ábrát rajzol ki az inga hegye a sarkokon, s mennyi a rajz elkészültének „periódusideje”?

20. Hogyan függ össze az inga helyének szélességi köre az inga hegye által leírt vonallal?

A kérdések megválaszolásában segít az ábra!

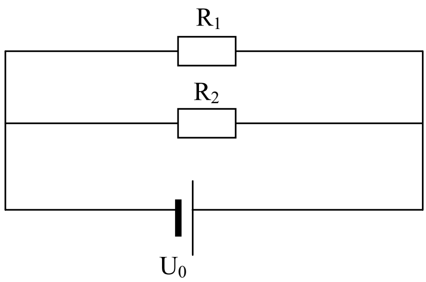


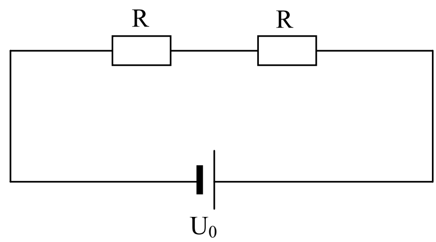
Egyenáramú hálózatok

Ezen a feladatlapon az elektromos ellenállások kapcsolásának néhány érdekesebb esetét vizsgáljuk. Bevezetésül tekintsük át az egyszerű soros és párhuzamos kapcsolás szabályait!

Soros és párhuzamos kapcsolás

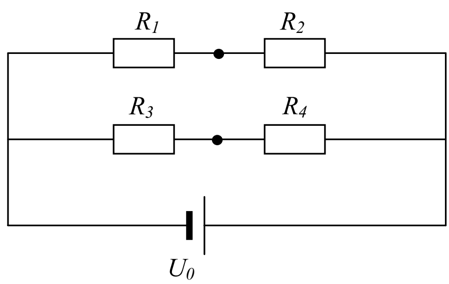
1. **Az ábrán vázolt soros, illetve párhuzamos kapcsolás esetén mekkora az egyes ellenállásokon átfolyó áram (I_1; I_2), illetve az egyes ellenállásokra eső feszültség (U_1; U_2) a telep belső feszültségével (U_0) és az ellenállások nagyságával (R_1; R_2) kifejezve?**





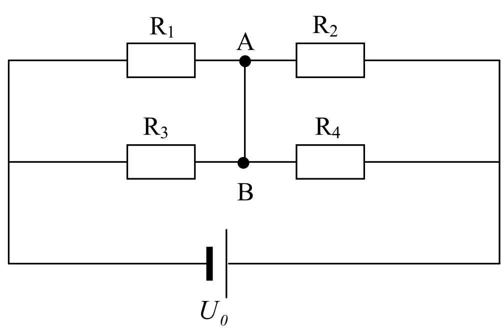
Merre folyik az áram?

2. Add meg az áram- és feszültségviszonyokat az alábbi kapcsolásban is mind a négy ellenállásra!

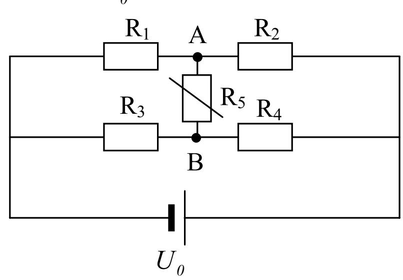


Az A és B pontokat összekötjük egy vezetővel.

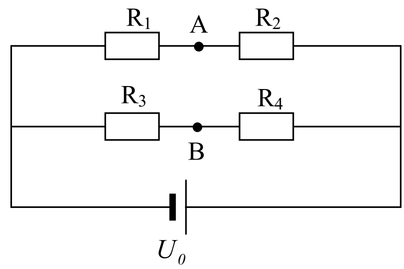
3. Mikor nem folyik áram A és B között? Mi a feltétele annak, hogy áram folyjon A és B között?



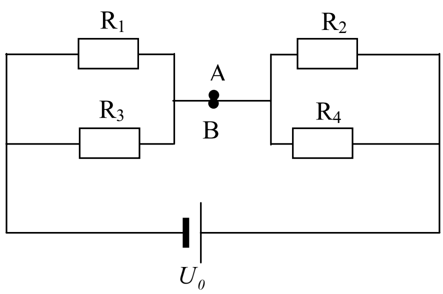
Ha A és B pont között nem folyik áram, akkor az A és B pont közötti vezetékszakasz kiemelhető! Még akkor is, ha egy ellenállás van az AB vezetékszakaszon.



Ekkor a hálózat a következőképpen rajzolható át:



Ha A és B között folyik áram, a hálózat a következőképpen rajzolható át (természetesen R_5 nélkül):

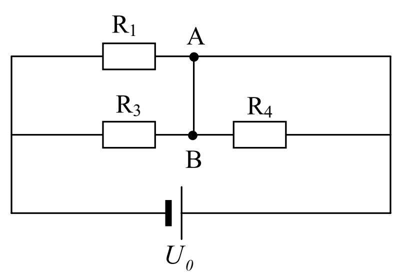


Az A és B pont egybeejthető, amennyiben teljesül a korábban megfogalmazott feltétel, s nem folyik áram A és B pont között.

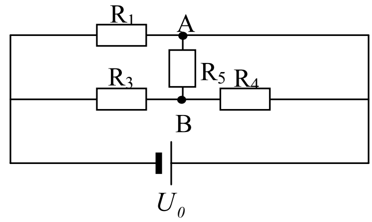
4. Mutasd meg, hogy ebben az esetben a fenteb-bi két kapcsolás egyenértékű! A számításhoz használhatsz a feltételnek megfelelő konkrét ellenállás értékeket is.

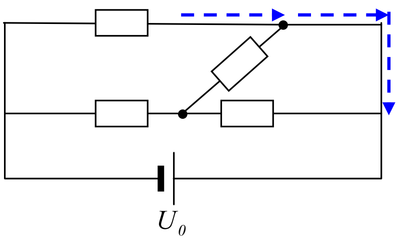
Gyakorló feladatok

5. Mekkora lesz a korábban megismert áramkör eredő ellenállása, ha az R_2 ellenállást az ábrának megfelelően nullára csökkentjük?



6. Mekkora lesz az R_5 ellenállást is tartalmazó áramkör eredő ellenállása, ha az R_2 ellenállást az ábrának megfelelően nullára csökkentjük?

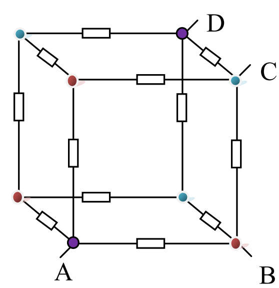




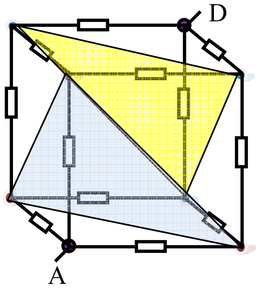
A feladat megoldása (a hálózat átrajzolása) során használjuk ki, hogy az ellenállás nélküli (elhanyagolható ellenállású) vezetékszakaszok rugalmasan hajlíthatók, rövidíthetők, tágíthatók!

Összetett hálózatok

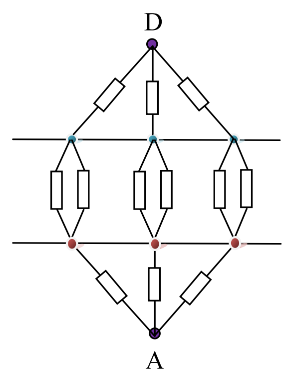
Az ábrán látható kocka minden élén azonos nagyságú (1 Ω) ellenállás van. Mekkora az eredő ellenállás az A és D pont között?



Mivel az A csúcsból kiinduló és a D csúcsba beérkező élek mentén az ellenállás azonos, ezért az A-val és D-vel szomszédos 3-3 csúcs rendre ekvipotenciális, köztük feszültségkülönbség nincs, azaz ha összekötjük azokat egymással, áram nem fog folyni közöttük.



Az azonos potenciálú (azonos feszültségeséssel jellemezhető) pontokat egy-egy „vezető síkkal" kötöttük össze az ábrán. Ezek után a hálózat síkba is kiteríthető:



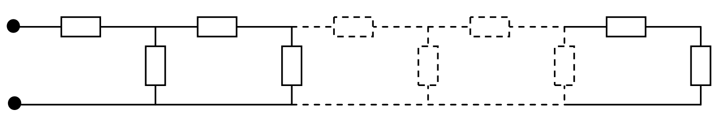
Az ábráról könnyen leolvasható, hogy 3-6-3 párhuzamosan kapcsolt ellenállásblokkot kapcsoltunk sorosan.

Így az eredő ellenállás $R_e = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\Omega$

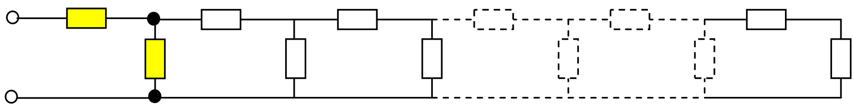
7. Határozd meg a kocka alakú hálózat eredő ellenállását az A és C, illetve az A és B pontok között!

Végtelen hálózatok

Az ábrán látható végtelen hálózat csupa 1 Ω-os ellenállásból áll. A szaggatott vonallal jelölt hálózati elemek helyén végtelen sok hálózati elem képzelendő el. Mekkora az eredő ellenállása?



Amennyiben a végtelen tagból álló hálózat eredő ellenállása véges, akkor nem változhat meg ez az érték, ha hozzákötünk a hálózathoz még egy elemet az alábbi módon. Látható, hogy az új hálózat pontosan ekvivalens a régivel, hiszen egy új szakasz hozzáadva ugyanúgy végtelen sok szakaszból áll. Tehát az alábbi végtelen hálózatnak ugyanakkora lesz az eredő ellenállása, mint a fentebbinek.



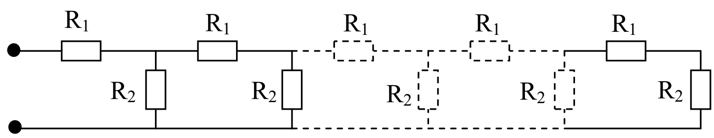
Az eredő ellenállást R_e-vel jelölve a következő egyenletet kapjuk:

$$R_e = 1\Omega + \frac{1\Omega \cdot R_e}{1\Omega + R_e}$$

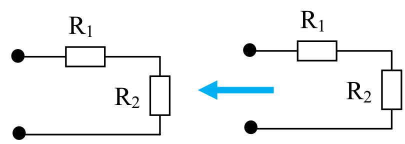
Az egyenlet felírásakor felismertük, hogy az R_e eredő ellenállású lánc egy 1 Ω-os ellenállással van párhuzamosan kötve, s az egészhez sorosan még egy 1 Ω-os ellenállást kötöttünk.

8. Oldd meg a fenti egyenletet, s határozd meg az eredő ellenállás értékét!

9. Határozd meg az eredő ellenállást az alábbi végtelen hálózatban, melyben két különböző ellenállás van!



Kezdjük el lépésenként felépíteni a végtelen hálózatot! Az első tag ellenállása $X_1=R_1+R_2$, azután hozzáillesztünk még egy tagot, ekkor ellenállása X_2, majd még egyet stb. Hogyan lehet meghatározni az eredő ellenállások sorozatát?



10. Add meg azt a számítási eljárást, mellyel a sorozat n. eleme, X_n meghatározható az előző X_{n-1} elemből!

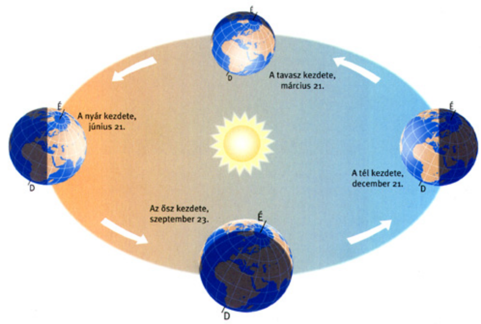
$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3$ **stb.**

A Hold, a Föld és a Nap

Az életünket leginkább meghatározó három égitest mozgásának legfontosabb sajátságait és a kölcsönös helyzetükből fakadó jelenségeket tárgyaljuk ezen a feladatlapon.

A Föld keringése a Nap körül

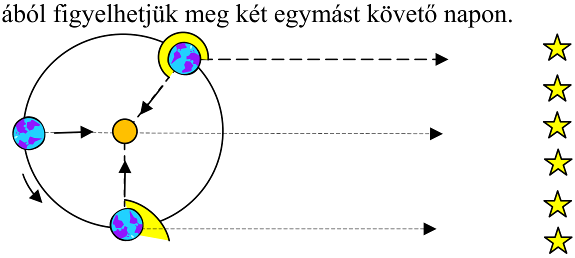
A Föld a Nap körül enyhén lapult ellipszispályán (majdnem körpályán) kering. Keringési ideje 365 nap, 6 óra 9 perc 10 másodperc.



1. **Értelmezd az ábra segítségével az évszakok változását!**

A Föld forgása tengelye körül

A Föld tengely körüli forgásának periódusideje már korántsem olyan egyszerűen meghatározható. Felmerül ugyanis a kérdés, mikor beszélhetünk egy tengely körüli forgásról. A Nap két delelése közötti időt egy „Nap napnak", átlagosan 24 órának tekintjük. Csakhogy a delelő Napot a Föld pályájának kis mértékben eltérő pontjából figyelhetjük meg két egymást követő napon.

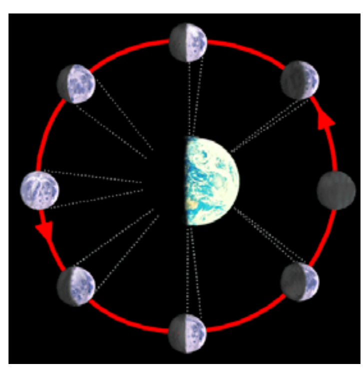


24 óra alatt a Föld a távoli állócsillagokhoz képest egy kicsivel több, mint egy fordulatot tesz meg, Nap körüli pályáján való előrehaladása miatt. Az ábra ezt az eltérést negyedévre és kb. 8 hónapra vetítve mutatja. Az ábrából megállapítható, hogy a Föld tengely körüli forgásának periódusa a végtelen távoli állócsillagokhoz (állni látszó) képest kevesebb, mint 24 óra (sziderikus forgásidő). Miközben a Föld a Naphoz képest 365,24 fordulatot tesz meg, addig a távoli állócsillagokhoz képest a fordulatok száma ennél több.

- Egy év alatt hány fordulatot tesz a Föld a távoli állócsillagokhoz képest?

2. **Állapítsd meg, mekkora a Föld keringési ideje a távoli állócsillagokhoz képest!**

A Hold tengely körüli forgása és keringése a Föld körül



A Nap megvilágítja a Holdnak a Nap felé eső oldalát. A megvilágított résznek azonban csak egy bizonyos hányadát látjuk. Mivel a Hold kering a Föld körül, ez a hányad mindig változik, ebből fakadnak a Hold fázisai. A képen jól látható, milyen irányból süt a Nap. Megfigyelhetjük azt is, hogy mennyit látunk a Hold megvilágított félgömbjéből a Föld körüli keringés különböző fázisaiban. A Hold nemcsak kering a Föld körül, hanem forog is a saját tengelye körül. A Hold a távoli állócsillagokhoz viszonyítva 27 nap 7 óra 43 perc alatt tesz meg

egy fordulatot, és ez a forgási sebesség pontosan annyi, mint amennyi idő alatt a Hold megkerüli a Földet, ezért a Hold mindig ugyanazon oldalát mutatja a Föld felé.
Két telihold között eltelt időszak azonban 29 nap 12 óra 44 perc.

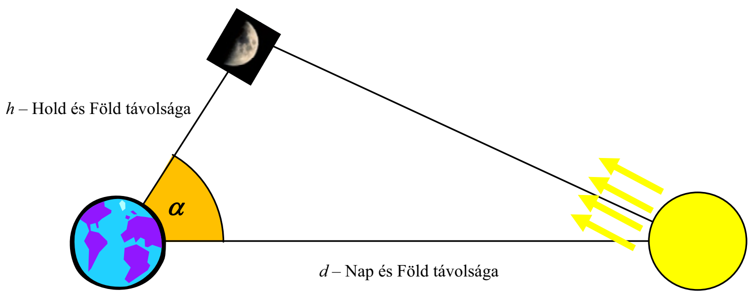
3. Mi lehet az eltérés magyarázata?

A Hold az égbolton felkel, majd lenyugszik. Erős fénye miatt ezt nem csak éjszaka figyelhetjük meg. Fázisai a Nap–Föld–Hold kölcsönös helyzet függvényei.

4. Vajon vannak a Földnek fázisai a Holdról nézve? Milyen lehet a földfelkelte a Holdon? Mi lehet a hasonlóság és mi a különbség a Hold Földről megfigyelhető változása, illetve a Föld Holdról megfigyelhető változása között?

Távolságok és arányok

A Nap–Föld távolság, valamint a Föld–Hold távolság arányát már az ókori görög filozófusok is ismerték. Arisztarkhosz (i.e. 320 és 250 között élt) helyesen ismerte fel a holdfázisok okát, s így az alábbi mérést tervezte meg:



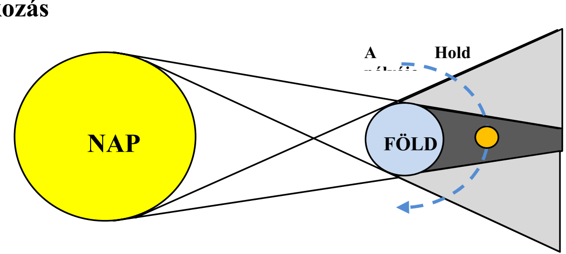
5. **Honnan tudta Arisztarkhosz, mikor alkot a Nap, a Hold és a Föld derékszögű háromszöget? α szöget megmérve hogyan írható fel a *d* és *h* aránya?**

Arisztarkhosz a távolságok arányát tudta kiszámítani. A távolságok nagyságának pontos meghatározására még évezredeket várni kellett.

6. **Keresd meg a Nap–Föld és a Föld–Hold távolságadatokat egy táblázatból, s készíts arányos rajzot a keringési idők felhasználásával a Nap, a Föld és a Hold rendszeréről egy teljes évre vetítve!** A rajzon tüntesd fel a Föld és a Hold Nap körüli pályáját is!
7. **A Föld és a Hold tömegének felhasználásával hasonlítsd össze a Föld és a Hold közötti gravitációs vonzóerőt a Nap és a Hold közötti vonzóerővel!**
8. **Milyen következtetésre juthatunk az előző két feladat eredményének egybevetésével?**

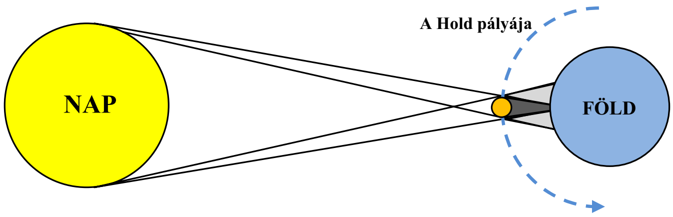
Holdfogyatkozás, napfogyatkozás

Holdfogyatkozásról beszélünk, ha a Hold a Föld árnyékába kerül, azaz a Föld megakadályozza, hogy a Holdat maradéktalanul érje a Nap.



9. Az ábra alapján ismertesd a holdfogyatkozás menetét, a szürke és sötét tartomány közötti különbség okát, a Hold látványát a fogyatkozás különböző tartományaiban?

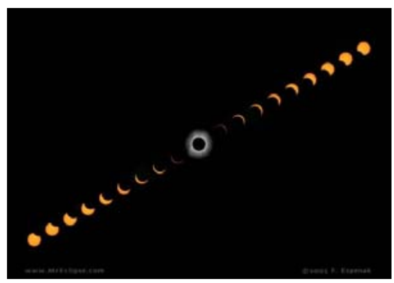
A Napfogyatkozás során a Hold árnyékot vett a Földre, azaz a Földről nézve a Hold eltakarja a Napot. Ebben az esetben is lehet részleges a takarás, vagy akár teljes is. Ha a Föld egy adott pontján teljes takarásban vagyunk, teljes napfogyatkozást észlelünk, ha a Nap egy része még megfigyelhető, részleges napfogyatkozásról beszélünk.



10. Add meg a teljes és részleges napfogyatkozás tartományait az ábrán!

11. Melyik égitest milyen mozgása befolyásolja elsődlegesen a napfogyatkozás időtartamát a Föld egy adott pontján?

12. Miért nincs minden hónapban teljes napfogyatkozás az Egyenlítő környezetében?

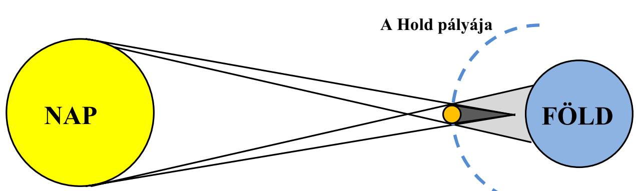


Gyűrűs napfogyatkozás

Amennyiben a Hold látszólagos átmérője a Földről nézve valamivel kisebb, mint a Nap látszólagos átmérője, akkor a Hold nem tudja a Napot teljes mértékben letakarni, annak pereme a Földről látható lesz.

13. Az alábbi két ábra közül melyik a gyűrűs napfogyatkozás és melyik a teljes napfogyatkozás? Válaszodat indokold! Mit látunk az első és mit a második képen?

A gyűrűs napfogyatkozás értelmezésében segít a következő ábra:



14. Mi a gyűrűs napfogyatkozás magyarázata, s milyen következtetést vonhatunk le a Nap és Hold átmérőjéről a jelenség alapján?

15. Milyen holdfáziskor van napfogyatkozás és holdfogyatkozás?

A fényképek egyike a növekvő, sarló alakú Holdat ábrázolja, a másikon holdfogyatkozás látható.

16. Hogyan dönthető el, melyik-melyik?

17. Milyen görbe választja el a sötét és világos részt a holdfázis esetén, illetve holdfogyatkozáskor?

18. Miért látjuk az egyik, illetve a másik esetben halványabban a teljes holdkorongot?

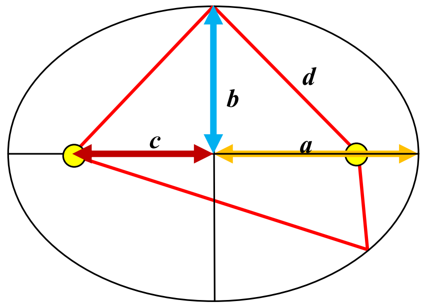
Kepler törvényei

A feladatlap segítségével nemcsak Kepler törvényeit ismerjük meg, hanem bepillantást nyerhetünk a megismerésükhöz vezető folyamatba, alkalmazásukba, következményeikbe, igazolásukba. Végül egy összetett feladat megoldása kapcsán foglaljuk össze ismereteinket.

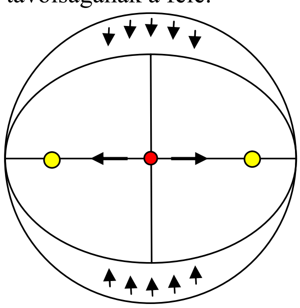
Kepler első törvénye

Kepler első törvénye kimondja, hogy a bolygók ellipszispályán keringenek a Nap körül, mely az ellipszis egyik fókuszában helyezkedik el.

Az ellipszis tulajdonságai



Az ellipszisnek számos definíciója létezik. Ezek közül a legismertebb a következő: az ellipszis azon pontok halmaza, melyek két ponttól (ezek a fókuszpontok) vett távolságösszege állandó. „*a*” az ellipszis fél nagytengelye, „*b*” az ellipszis fél kistengelye, „*c*” a fókuszpont és az ellipszis középpontjának távolsága, azaz a két fókusz távolságának a fele.



1. Igazold, hogy az előző definícióban említett távolságösszeg egyenlő az ellipszis nagytengelyével (2*a*)! Mutasd meg, hogy $d = a$, és így érvényes a következő egyenlet: $a^2 = b^2 + c^2$!

Az ellipszis egy másik definíció szerint egy kör adott irányból történő kicsinyítéséből is előállítható. Az eljárást az alábbi rajz mutatja.

Ábránkon a függőleges torzítás mértéke $\frac{b}{a}$. Az ellipszis körhöz képesti torzulását a fókuszpontok távolsága is kifejezi. A kör esetében ez a távolság nulla, a két fókuszpont egybeesik. Minél laposabb az ellipszis, annál nagyobb a fókuszpontok távolsága az eredeti kör átmérőjéhez viszonyítva. Mindezt az „*excentricitás*” nevű mennyiség fejezi ki (ε).

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

2. A fentiek alapján állapítsd meg, mekkora egy ellipszis területe!

3. Bizonyítsd be, hogy $\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$!

Hogyan ismerte fel Kepler, hogy a bolygók ellipszispályán keringenek a Nap körül?

A napközéppontú világkép gondolata a lengyel Kopernikusztól származott. Kopernikusz kör alakú bolygópályákat feltételezett a Nap körül. Az így kialakított modell azonban olyan pontatlanul írta le a bolygók helyzetét a valósághoz képest, hogy a Nap körül szabályos körök mentén keringő bolygók modellje alapján a bolygók várható pozícióira pontos jóslásokat nem lehetett készíteni.

Uraniborg main building. Copper etching from Blaeu's Atlas Major, 1663.

Az eltérés magyarázata a pályák alakjában rejlett. A Föld pályája kevéssé tér el a körtől. Az eltérés felismerése pontos mérések révén vált lehetségessé. Ezeket a méréseket nem Kepler, hanem mestere, Tycho de Brahe dán csillagász és nagyszámú megfigyelőből álló csapata végezte. A munka a Brahe által alakított

megfigyelőközpontban, Uranienborgban zajlott profi körülmények között, a kor legjobb műszereivel.
Tycho de Brahe különleges, ellentmondásos figurája a tudománytörténetnek. Az alábbi kérdések alapján ismerkedj meg életének néhány epizódjával!

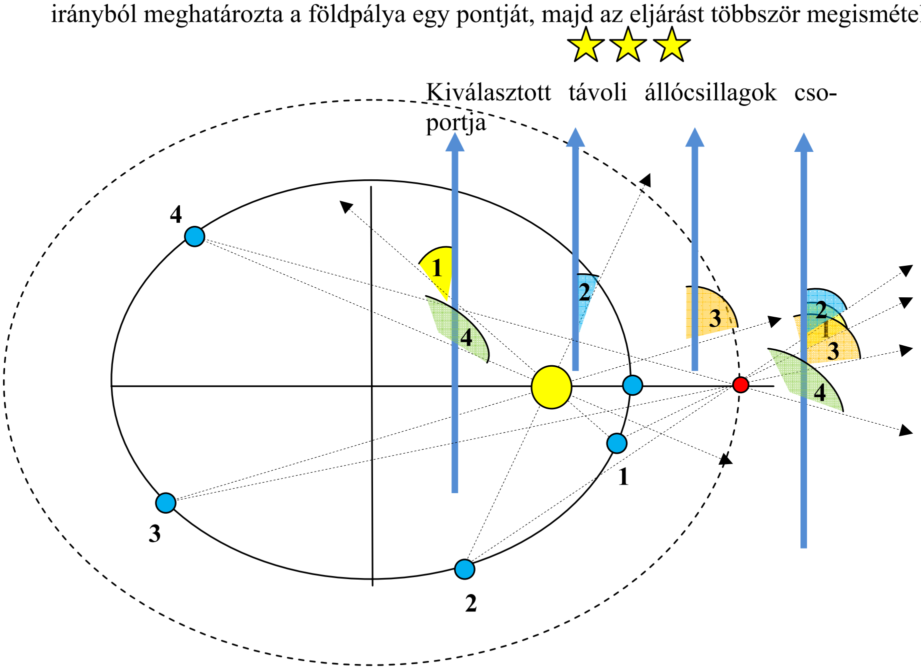
4. Hogyan képzelte el Tycho de Brahe a Naprendszert?
5. Miért volt Tychonak orrprotézise, és milyen anyagból készült?
6. Mikor élt és hogyan halt meg Tycho de Brahe?
7. Ki volt Tycho magyar orvosa, mit tudunk életéről?

Tycho de Brahe halála után évtizedekre visszamenő mérési eredményeit használta fel Kepler a bolygópályák titkainak megfejtésére. Ezeket az adatokat az ún. Rudolf-féle táblák tartalmazták, amelyeket már Kepler adott ki.

Kire utal a táblázatok elnevezése és miért?
A táblázat adatai lehetőséget adtak Keplernek arra, hogy saját észlelés nélkül kielemezze a bolygópályákat. Ezek a számítások vezettek el a Kepler-törvényekig.

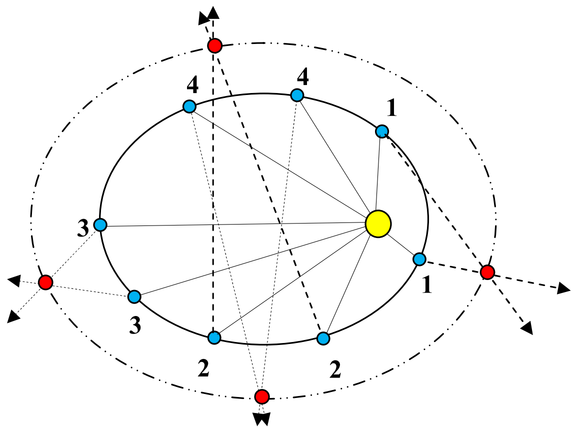
Hogyan határozta meg Kepler a Föld pályáját?

Kepler egy olyan napból indult ki, amikor a Nap, a Föld és a Mars egy egyenes mentén helyezkedett el. Tudta, hogy a Mars keringési ideje 687 földi nap. A táblázatból kikereste, hogy 687 nap múlva a távoli állócsillagokhoz képest merre esett a Nap, illetve a Föld. A két irányból meghatározta a földpálya egy pontját, majd az eljárást többször megismételte.

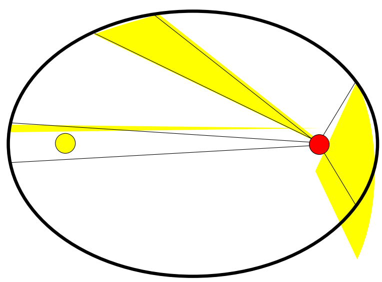


Az ábrán az összetartozó számok jelölik az egyes szerkesztési lépéseket. A Mars pályáját nem ismerjük, azt szaggatott vonallal jelöltük. A Föld pályáját a szerkesztés rajzolja ki. A szerkesztés nem adta meg a bolygópályák abszolút méreteit, csak egymáshoz viszonyított arányát. A Föld pályájának ismeretében megszerkeszthető a Mars pályája.

8. Írd le az ábra alapján az eljárás lényegét!

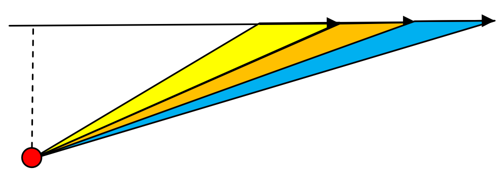


Kepler második törvénye

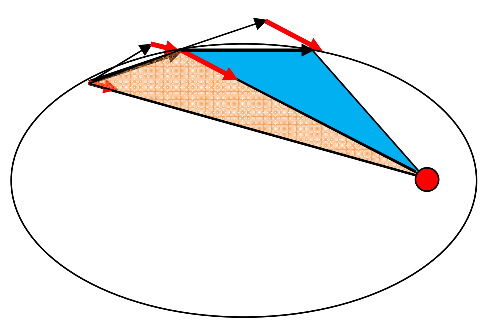


Kepler második törvénye kimondja, hogy a bolygót a Nappal összekötő egyenes (vezéregyenes) azonos idők alatt azonos területet súrol (a területi sebesség állandó). Azaz a bolygó napközelben nagyobb sebességgel, naptávolban kisebb sebességgel mozog. Ezt az állítást szemlélteti az ábra.

Kepler második törvényének igazolása

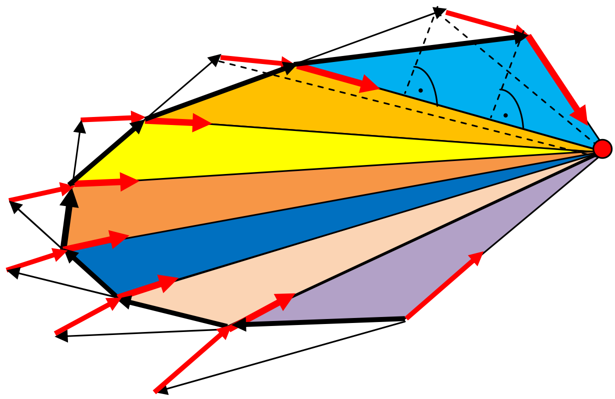


9. Az ábra alapján igazold, hogy a területi sebesség állandósága nyilvánvaló, ha a bolygóra nem hat a Nap, azaz egyenes vonalú egyenletes mozgást végez!



10. Mutasd meg, hogy az állandóság akkor is érvényes, ha figyelembe vesszük a Nap vonzását, s a bolygó nemcsak előre megy, hanem lépésenként a Nap irányába toljuk, ahol a Nap irányát a megelőző lépés utáni naphelyzet határozza meg!

Mennyi idő alatt futja be a bolygó pályájának egy szakaszát?

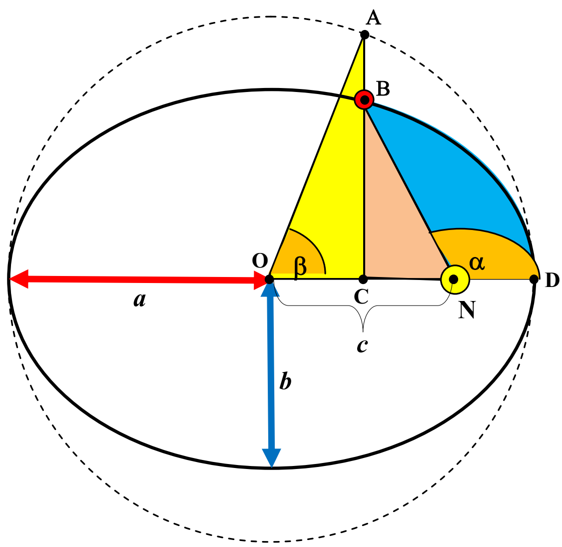


Kepler második törvénye lehetőséget ad a bolygó egy pályaszakaszának befutásához szükséges idő kiszámítására. Mivel a területi sebesség állandó, az adott pályaszakaszhoz tartozó vezéregyenes által súrolt terület és az ellipszis területének aránya megadja a keresett idő és a keringési idő arányát. De hogyan lehet kiszámítani a pálya két pontja között a vezéregyenes által súrolt területet?

11. Az ábra alapján igazold az alábbi összefüggést (Kepler-egyenlet):

Az „A" pont a B (bolygó) helyzetének megfelelője az ellipszishez tartozó körön. A *t* a BD pályaszakasz megtételéhez szükséges idő. A szögeket radiánban mérjük.

$$2\pi t = T(\beta - \varepsilon \sin \beta)$$



A bizonyítás során az alábbi lépéseket kövesd!

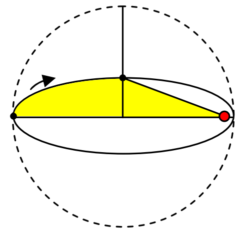
- Határozd meg az OAD körcikk területét!
- Vond le belőle az OAC háromszög területét!
- Kicsinyítsd a kapott síkidomot BCD-be!
- Vond le belőle a BCN háromszöget!
- Írd fel a szükséges arányokat!
- Használd ki, hogy $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$!

(A csillagászok a β szöget excentrikus anomáliának nevezik.)

A Halley-üstökös

A Halley-üstökös elnyúlt ellipszispályán kering, melynek adatai a következők:
Keringési idő: 75,3 év; Pálya-excentricitás: 0,967;
a = 17,8 CSE

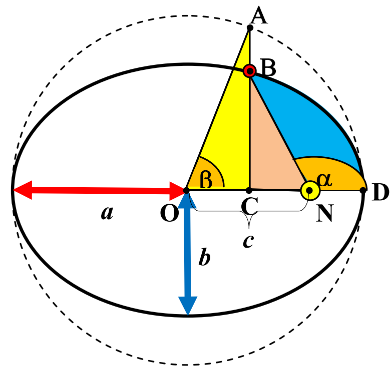
12. Mennyi idő alatt futja be a Halley-üstökös pályája naptávoli pontjától a napközeli pontig tartó szakaszának első felét?



Számold ki a b/a hányadost ε-ből!

- Határozd meg a negyed ellipszis területét!
- Add meg b értékét, s a derékszögű Δ területét!
- Számold ki a keresett időt a keringési időből és a területarányokból!

Kiemelten nehéz feladat megtalálni az elemi kapcsolatot egy általános esetben α és β között. Ezt az alábbi levezetésben bemutatjuk:



$$\mathrm{tg}(180 - \alpha) = \frac{BC}{CN} = \frac{\frac{b}{a}AC}{CN} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot AC}{c - a\cdot\cos\beta}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot AC}{a\cdot\cos\beta - c} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot a\cdot\sin\beta}{a\cdot\cos\beta - a\cdot\varepsilon} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot\sin\beta}{\cos\beta-\varepsilon} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot\mathrm{tg}\beta}{1-\dfrac{\varepsilon}{\cos\beta}} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot\mathrm{tg}\beta}{1-\varepsilon\cdot\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}}$$

Használjuk ki, hogy $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$, illetve

$\mathrm{tg}\beta = \dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2}}$. Ezeket behelyettesítve a fenti egyenletbe: $\dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\left(\dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2}}\right)}{1-\varepsilon\cdot\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}} \rightarrow$

$$\frac{\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\left(\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2}}\right)}{1-\varepsilon\cdot\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}}$$

Kihasználhatjuk ezen kívül a következő trigonometrikus összefüggést:

$\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta} = \dfrac{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2}}$ Így egyenletünk a következő alakot ölti:

$$\frac{\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\left(\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2}}\right)}{1-\varepsilon\cdot\dfrac{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2}}} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2}-\varepsilon(1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2})} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}}{(1-\varepsilon)-\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2}(1+\varepsilon)} = \frac{\sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\beta}{2}(\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})}$$

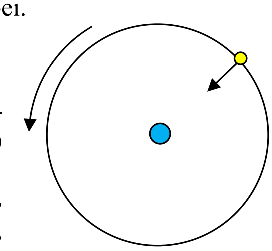
Összehasonlítva a jobb és bal oldalt, látható, hogy az egyenlet a következő alakra hozható:

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$$

Így tetszés szerinti a pozícióhoz meghatározható β, melyből kiszámítható a Kepler-egyenlet segítségével a napközeli helyzetből (D) a pálya B pontjáig tartó keringés ideje. A fenti módszerrel a pálya bármely két pontja között a keringési idő számíthatóvá válik. Ugyanakkor a hely-idő függvény meghatározása a pálya mentén további bonyolult feladat.

Kepler harmadik törvénye

Kepler harmadik törvénye az azonos vonzócentrum körül keringő égitestek keringési idejét és közepes távolságát (a) hasonlítja össze. A törvény kimondja, hogy a keringési idők négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a közepes bolygótávolságok köbei.



$$\frac{a^3}{T^2} = \textit{állandó}$$

Az állítás akkor helytálló, ha a vonzócentrum (Nap) tömege sokkal nagyobb, mint a körülötte keringő objektumok (bolygók) tömege.

Kepler harmadik törvénye segítségével ismerte fel a gravitációs vonzás természetét Newton. Képzeljünk el olyan égitesteket, melyek a Föld körül körpályán keringenek (Newton a Holdat vizsgálta)! Mi a feltétele annak, hogy az égitest keringése során Kepler harmadik törvénye teljesüljön?

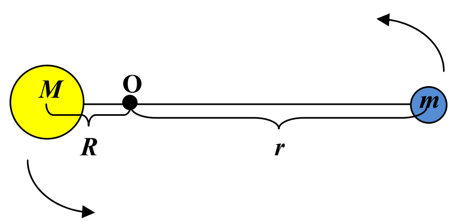
Hogyan függjön a Föld középpontjáról vett távolságtól a Föld által a Holdra kifejtett vonzóerő, hogy Kepler harmadik törvénye érvényes legyen?

13. Igazold, hogy ez a vonzóerő a távolság négyzetével fordítottan arányos!

A megoldásban segítenek a következő gondolatok:

- A körpálya sugara $r = a$
- A centripetális erőt r-rel és T-vel érdemes felírni.

A Newton-féle általános tömegvonzási erőt leíró egyenlet $F = f\frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$, ahol f a gravitációs állandó, melynek értéke $6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$ (ld. 11. feladatlap).



Kepler harmadik törvényének pontos alakja figyelembe veszi, hogy a Nap és az égitestek között kölcsönös vonzás van. A rendszer keringése nem a Nap középpontja körül, hanem a Nap-bolygó rendszer tömegközéppontja körül zajlik. (Két test egymás körül kering.)

Nézzük meg, hogyan alakulnak ilyenkor a keringési idők!

$$M \cdot R = m \cdot r$$

$$f\frac{mM}{(R+r)^2} = mr\frac{4\pi^2}{T^2} = MR\frac{4\pi^2}{T^2}$$

A két égitest távolsága $m + M = d$

Pl. r kifejezhető a tömegekkel és d-vel a tömegközéppontra vonatkozó egyenletből.

$$r = \frac{M}{M+m}d\,,$$

így Kepler harmadik törvénye a következő alakot ölti:

$$f\frac{mM}{d^2}=m\frac{M}{M+m}d\frac{4\pi^2}{T^2}\rightarrow f\frac{(M+m)}{4\pi^2}=\frac{d^3}{T^2}$$

Egy ismeretlen égitest tömegének kiszámítása a körülötte keringő mesterséges hold keringési idejéből

Az ismeretlen tömegű égitest a Nap körül keringő Ida kisbolygó. A Naptól vett átlagos távolsága (pályaellipszisének fél nagytengelye) a= 428 000 000 km. A kisbolygó körül a Dactyl nevű parányi hold kering (a képen apró pont), a' = 108 km közepes pályasugárral. Az Ida kisbolygó nap körüli keringési ideje T =1768 nap, a Dactyl nevű holdacska a kisbolygót T' = 1,54 nap alatt kerüli meg.

14. Mekkora a bolygó tömege? A Nap tömege $1{,}99\cdot 10^{30}\,\text{kg}$**.**

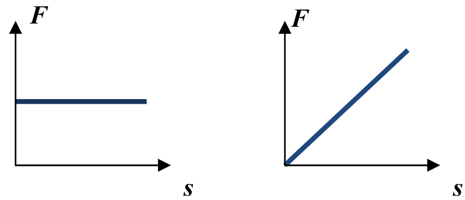
A megoldás menete:

- Írd fel Kepler harmadik törvényét a Nap körül keringő bolygóra, majd a bolygó körül keringő holdacskára!
- Képezd a két egyenlet hányadosát!
- Vedd figyelembe, hogy a bolygó tömegéhez képest a holdacska tömege elhanyagolható!

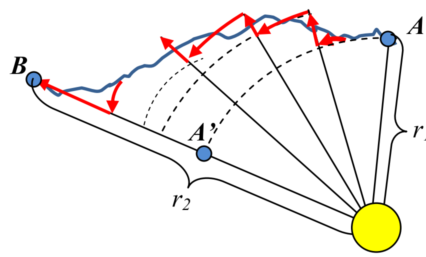
A gravitációs tér munkája

Ebben a feladatlapban a bolygók mozgásának leírásához újabb eszközt kapunk, megismerve a gravitációs térben zajló mozgások energetikai viszonyait.

Hogyan számoljuk ki a munkát állandó erő esetében, az elmozdulással egyenletesen növekvő erőt feltételezve?
A Föld gravitációs terében, a Föld középpontjától r távolságra egy m tömegű testre $F = f\frac{mM}{r^2}$ erő hat. Ha a testet egy A pontból egy B pontba visszük a Föld gravitációs vonzásával szemben, akkor munkát végzünk, melynek nagyságát azért nehéz kiszámítani, mert a kifejtendő erő a Föld középpontjától vett távolság függvényében változik.



1. **Az alábbi ábra alapján igazold, hogy a munka, melyet az *m* tömeg A-ból B-be való mozgatása során végeztünk, független az úttól, s csak az A, illetve B pont földközépponttól vett távolságának függvénye!**



Az A-ból B-be menet végzett munka megegyezik az A' és B közötti sugárirányú útszakaszon végzett munkával. De mekkora ez a munka?
A munka kiszámításához használjunk átlagos erőt. Ez most nem számítani közepe lesz az út elején és végén kifejtendő erőnek, hanem mértani közepe. (Ez önkényes eljárás, bár kellően rövid útszakasz esetén elvileg bármilyen közép megfelelhet. Míg a lineáris F(x) függvény esetében a számtani közép adja meg a megfelelő összefüggést, esetünkben a mértani közép vezet jó eredményhez.)

2. **Írd fel r_1 és r_2 távolságban az *m* tömegre ható erőt, majd képezd a két érték mértani közepét, s ezt szorozd meg a sugárirányban történt elmozdulás mértékével! Számítsd ki a munkát a gravitációs térben!**

A kapott eredmény: $W = fmM(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$

Ha a Földtől végtelen messzire jutó, s ezért a Föld végtelen hatótávolságú gravitációjától „megszabadult" testet tekintjük nulla helyzeti energiájúnak, akkor a Földtől véges R távolságban a testeknek negatív helyzeti energiája van, melynek értéke: $E_h = -f\frac{mM}{R}$. Két tetszőleges pont között végzett mozgás során pedig a helyzeti energia megváltozását, azaz a gravitáció ellenében végzett munkát a fenti összefüggés adja meg.
Az inhomogén gravitációs térben meghatározott helyzeti energia felhasználásával az energia-megmaradás elvét alkalmazva összetett problémákat vizsgálhatunk meg.

3. **Mekkora kezdősebességgel dobjunk fel egy testet függőlegesen, hogy a Föld felszínétől 10 000 km-re legyen pályájának tetőpontja?**

Alkalmazd a helyzeti energiára vonatkozó összefüggést a Föld felszínén és a felszín felett 10 000 km-rel, és írd fel az energiamegmaradás törvényét a két helyzetre!
Második kozmikus sebességről vagy szökési sebességről beszélünk akkor, ha egy testet olyan nagy kezdősebességgel hajítunk el a vizsgált égitest felszínéről, hogy az sosem esik vissza. (A felszíntől végtelen messzire jut, azaz nulla helyzeti energiájú állapotba kerül.)

4. **Mekkora lenne ez a kezdősebesség, ha a Föld felett minden magasságban akkora lenne a gravitáció, mint a Föld felszínén?**
5. **Számítsd ki a 2. kozmikus sebesség értékét a Földön!**

A feladat csak annyiban tér el az előzőtől, hogy a 10 000 km-es helyet „kitoltuk” a Föld felszínétől végtelen távolságra.

6. **Határozd meg a 2. kozmikus sebesség értékét a Marson!**
7. **Mekkora sugarú gömbbe kellene összezsugorítani a Föld anyagát (változatlan tömeg mellett), hogy a második kozmikus sebesség a felszínén 300 000 km/s, azaz fénysebesség legyen? (Fekete lyuk állapot.) A számítás során relativisztikus hatásokat ne vegyél figyelembe!**
8. **Nézz utána a weben, hogy mi a fekete lyuk!**

Az energia meghatározása egy a Föld körül körpályán keringő mesterséges hold esetében

Írjuk fel a helyzeti, mozgási és összes energiát egy a Föld körül r sugarú körpályán keringő mesterséges holdra!

$$E_ö = E_h + E_m = -f\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

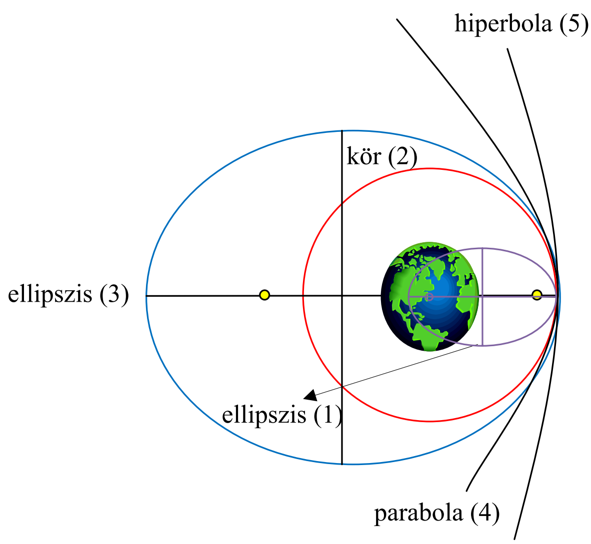
Használjuk ki a körmozgás dinamikai feltételét, azaz hogy a mesterséges holdat a Föld gravitációs vonzása tartja körpályán! $F_{cp} = f\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$

Így a körpálya esetén $E_ö = -f\frac{mM}{2r}$.

A Föld felszíne felett vízszintesen (sugárra merőlegesen) elhajított test lehetséges pályái a kezdősebesség függvényében

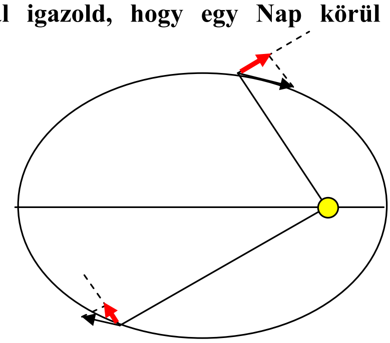
Az alábbi ábra a lehetséges pályákat mutatja:

1. Ellipszispálya, melynek távolabbi fókusza a Föld középpontja.
   $E_m < f\frac{mM}{2r}$
2. Körpálya, melynek középpontja a Föld középpontja.
   $E_m = f\frac{mM}{2r}$
3. Ellipszispálya, melynek közelebbi fókusza a Föld középpontja.
   $E_m < f\frac{mM}{2r}$



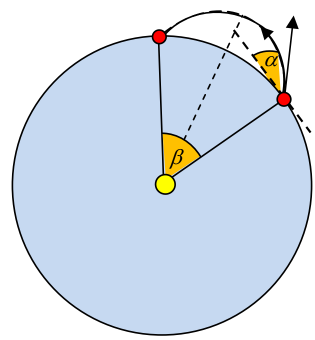
4. Parabolapálya. $E_m = f\dfrac{mM}{r} \to E_ö = 0$
5. Hiperbolapálya. $E_m > f\dfrac{mM}{r} \to E_ö > 0$ Mint látható, zárt pálya csak akkor jön létre, ha $E_ö < 0$.

9. Az energiamegmaradás elvének felhasználásával igazold, hogy egy Nap körül keringő égitest sebessége annál nagyobb, minél közelebb van a Naphoz (Kepler második törvénye)!



Kepler második törvénye a következőképpen általánosítható: $r \cdot v_t = áll.$ Ahol r az égitest vonzócentrumtól (a Nap közepétől) vett távolsága, v_t pedig az égitest sebességvektorának r sugárra (vezéregyenesre) merőleges komponense.

Ballisztikus rakéta



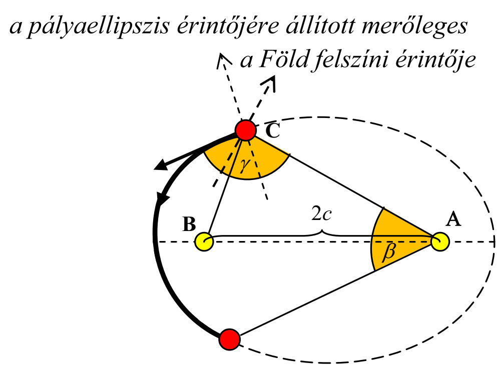
A Föld egy pontjáról (30°-os északi szélességi kör) ballisztikus rakétát akarunk indítani az Északi-sarkra.

10. Mekkora kezdősebességet adjunk a rakétának, ha 40°-os szögben akarjuk elindítani? Milyen magasra jut fel a rakéta?

(A Föld forgásától tekintsünk el! R_F = 6370 km, $M_F = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.)

Első lépés: a pályaellipszis kiszámolása: a két fókusz távolságának fele (c) és a fél nagytengely hosszának (a) meghatározása:

- Határozd meg β értékét!
- Határozd meg γ értékét α segítségével, kihasználva azt, hogy α a Föld felszínével bezárt szög!
- Vedd észre, hogy az ellipszis nagytengelye felezi β-t!
- Számold ki az ACB háromszög szögeit! Használd ki, hogy a pályaellipszis érintőjére állított merőleges felezi ezt a szöget! (ld. 4. feladatlap).



- Írd fel a szinusz-tételt az ABC háromszög AB (= 2c) és AC (= R_F) oldalára, valamint a BC és az AC oldalára! Az első egyenletből c megkapható, mivel AC (= R_F) + BC = 2a, a második egyenletből a kiszámítható. A rakéta pályájának tetőponti magassága (h) a fél nagytengelyből (a) és a két fókuszpont távolságának feléből (c) meghatározható.

Második lépés: az energiamegmaradás elvének és Kepler második törvényének egyidejű alkalmazása.

- Írjuk fel az összes energiát a kilövés helyére és a pálya tetőpontjára! Használjuk ki az energiamegmaradás elvének érvényességét!

  $E_{ö} = E_h + E_m = -f\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}mv^2$

- Írjuk fel Kepler második törvényét ezekre a pontokra! $- r \cdot v_t = áll.$
- Egyenletrendszerünkből a ballisztikus rakéta kezdősebessége (v_0) meghatározható.

12. Menyi ideig repült a rakéta?

Használd Kepler 3. törvényét és a 16. feladatlap alapján a Kepler-egyenletet!

A levegő nyomása

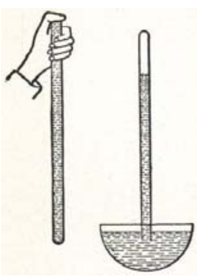
Az arisztotelészi filozófia egyik alapállítása volt, hogy a természet irtózik az űrtől, azaz a légüres tértől: „Horror vacui”, „az üresség rettenete”. Ezen elv alapján számos jelenséget értelmeztek Arisztotelész követői.

Pl.: Hogyan szívjuk fel az italt a pohárból egy szívószál segítségével?
A szívószálból kiszívjuk a levegőt, így annak helyére víz megy be, hiszen üresen nem maradhat a szívószál, mivel a természet irtózik a légüres tértől.
Ezt a jelenséget ma a külső légnyomás felhasználásával írnánk le. A levegő nyomását először Torricelli olasz fizikus mérte meg, bebizonyítva ezzel azt is, hogy a *horror vacui* elve hibás.

A légnyomás megmérése Torricelli módszerével

1. **Mikor élt Torricelli? Melyek voltak tudományos pályájának legfontosabb eredményei?**

A Torricelli-kísérlet lényege a következő:



Egy higannyal telt, kb. 1 m hosszú, alul zárt, felül nyitott csövet szájával lefelé egy higanyos edénybe fordítunk. A higany egy része az ábrának megfelelően kifolyik a csőből. A higany felett légüres tér keletkezik (némi higanygőztől eltekintve). A külső levegő ~ 76 cm higanyoszlopot tartott a csőben. A levegő nyomása 76 Hgcm.

Ahogy a 8. feladatlapon láttuk, a folyadékoszlop nyomását kizárólag a folyadék sűrűsége és a folyadékoszlop magassága határozza meg.

$p = h \cdot \rho \cdot g$

2. **Határozd meg, hogy 1 Hgcm hány Pascal (N/m^2)!**
3. **Miért volt alkalmas folyadék a higany a kísérlet elvégzésére?**
4. **Milyen magas vízoszloppal tud egyensúlyt tartani a 76 cm-es higanyoszlop?**

A magdeburgi féltekék
Otto Guericke, Magdeburg tudós polgármestere híres kísérlettel bizonyította a légnyomás meglehetősen nagy voltát.

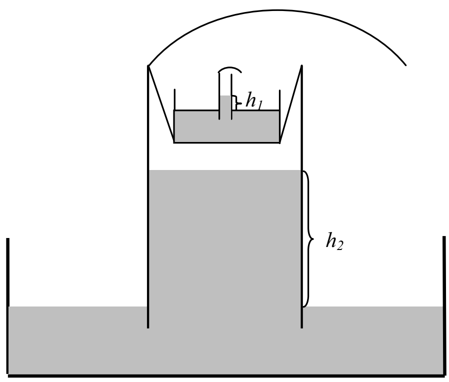
Híres kísérletében tizenhat ló sem tudta széthúzni azt a két, pontosan összeillesztett félgömböt, melynek belsejéből előtte kiszivattyúzták a levegőt.

5. **Becsüld meg a metszet alapján, hogy mekkora erőt kellene kifejteni a lovaknak, ha a félgömböket szét akarják húzni!**
6. **Miért nem kötötték a gömb egyik rögzítését egy vastag, erős fához vagy a falhoz, s húzatták egy irányból 16 lóval a gömböt? Hogyan befolyásolta volna az eredményt ez az eljárás?**

A levegő sűrűségének magassággal való változását Torricelli vizsgálatait megelőzően a magyar Frőlich Dávid késmárki matematikus és naptárkészítő is felismerte. A Tátra egyik csúcsának, valószínűleg a Szalóki-csúcsnak megmászásakor írta a következőket:

„Midőn az hegynek legfölsőbb tetejére jutottam, oly csendes és vékony levegőeget tapasztaltam ott, hogy még csak egy hajszálam mozdulását sem venném észbe, holott pedig az alsóbb hegyeken kemény és zuhogó szelek között jártam: Amelyből azt hoztam ki, hogy az Carpatus hegynek teteje annak alsó részétől fogva szinte egy mérföldnyire légyen, és hogy a levegőégnek legfölsőbb tartományáig érjen, melyet a szelek nem járnak. Kilőttem az hegytetőn a puskámat, melynek ott, a kilövéskor csak annyi hangja volt, mintha egy száraz vesszőt kettétörtem volna, de egy kevés időcske múlva ebből nagy dörgés-morgás lett, mely az hegynek alsóbb részeit, völgyeit és erdeit betöltötte. Aláfelé jöttömben a régi havasokon és mély völgyeken, mikor ismét kilőném a puskámat, sokkal nagyobb és rettentőbb hangot adott, mint a legnagyobb ágyúkilövés, és az terjedvén, úgy tetszett énnékem, mintha az egész hegy azonnal vélem együtt elsüllyedne. Tartott pedig fél fertályóráig, míg ez a zörgés-morgás minden berkeket és barlangokat el nem hatott, és az azokban lévő levegőégtől visszaverettetvén, annyival nagyobb lett, és kétszeresen terjedett s a többi."[2]

7. **A hang mely tulajdonságára utal az idézet?**



Űr az űrben

A Torricelli-kísérlet során levegő kerülhet a „Torricelli-űrbe". Az ábrán látható eljárás (a Torricelli-űrben egy másik Torricelli-cső) kiküszöböli a levegő beszivárgásának torzító hatását.

8. **Hogyan határozható meg a légnyomás értéke ebben az elrendezésben? Honnan látszik, hogy levegő került a Torricelli-űrbe?**

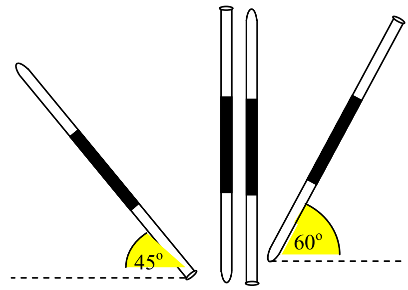
A Boyle–Mariotte-törvény igazolása Melde-csővel

Állandó hőmérsékleten a gázok nyomása és térfogata fordítottan arányos. Ezt mondja ki a Boyle–Mariotte-törvény.

A törvény igazolását egy higanyt tartalmazó üvegcsővel (Melde-cső) lehet könnyen elvégezni.

[2] **Szőnyi Benjámin: Gyermekek fisikája. Pozsony. 1774**

A Melde-cső az egyik végén zárt keskeny üvegcső, melyben középen higany helyezkedik el. A cső helyzetét változtatva a higany elmozdul a csőben. (A cső fala és a higany közötti kölcsönhatás elhanyagolható.)
Vízszintes helyzetű, 60 cm-es Melde-csövet 20 cm-es higanyoszlop bont kettő, 20-20 cm-es részre.

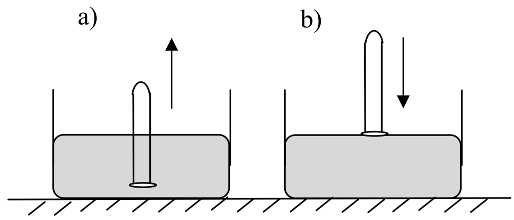


9. Állapítsd meg a bezárt levegő térfogatát a cső alábbi helyzeteiben a Boyle–Mariotte-törvény segítségével!

(A levegő nyomását Hgmm-ben írd fel, a ferde higanyoszlop nyomásának meghatározásakor a 8. feladatlapra támaszkodhatsz!)
Amikor a Melde-csövet a Boyle–Mariotte-törvény igazolására használjuk, a mért térfoga-tok és nyomások szorzatának azonosságát kell megmutatnunk.

Egyéb feladatok a Boyle–Mariotte-törvényre

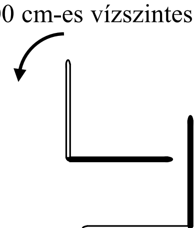
Az ábrákon 10 cm-es, alul nyitott üvegcső van. Az a) esetben a cső félig merül higany-ba, a b) esetben a cső üres. A csőbe zárt levegő kezdetben 760 Hgmm nyomású.



10. Hogyan helyezkedik el a csőben a higany, ha a csövet 5 cm-rel feljebb húzzuk úgy, hogy az alja még éppen a higanyba érjen? (a)

11. Hogyan helyezkedik el a csőben a higany, ha a csövet 5 cm-rel lejjebb nyomjuk úgy, hogy csak a fele lóg ki a higanyból? (b)

Figyelj arra, hogy a cső elmozdulása nem egyenlő a higanyoszlop elmozdulásával!
Mindkét végén zárt, „L” alakú, összesen 2 m-es vékony üvegcső 100 cm-es vízszintes ágában higany van. A függőleges ágban lévő levegő nyomása 760 Hgmm.



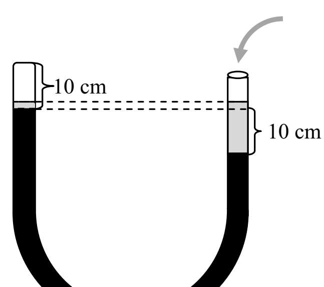
12. Hogyan helyezkedik el a higany a csőben, ha azt 90°-kal az ábrának megfelelően elforgatjuk?

Mindkét végén zárt, 30 cm hosszú üvegcsőben pontosan középen 10 cm higany van. A cső az ábra szerinti függőleges helyzetében 10 cm-es, 76 Hgcm nyomású légoszlopot zár be alul.

13. Hogyan helyezkedik el a higany a csőben, ha azt szabadon ejtjük?

- Határozd meg a levegő nyomását a higany fölött!
- Mi változik, ha a cső szabadon esik?
- Mi következik ebből a bezárt levegő nyomására a higany két oldalán lévő csőrészekben?

„U” alakú, keskeny üvegcsőben higany van. A cső egyik vége zárt, itt a higanyszint 10 cm-rel magasabb, mint a másik, nyi-tott végen. A külső légnyomás 76 Hgcm.



14. Mennyi (hány cm) higanyt kell beönteni a nyitott csőoldalon, hogy a higanyszint azonos legyen a két oldalon?

A bezárt levegőoszlop magassága is 10 cm.

Figyelj arra, hogy ha higanyt öntünk be a nyitott csővégen, a higanyszint a zárt oldalon is megemelkedik!

Mekkora volt kezdetben a bezárt levegő nyomása?

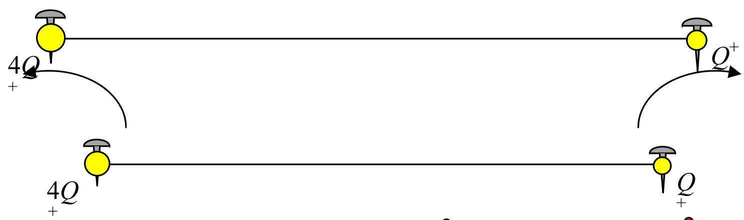
A feladat megoldásában segít az ábra.

Elektrosztatikus tér

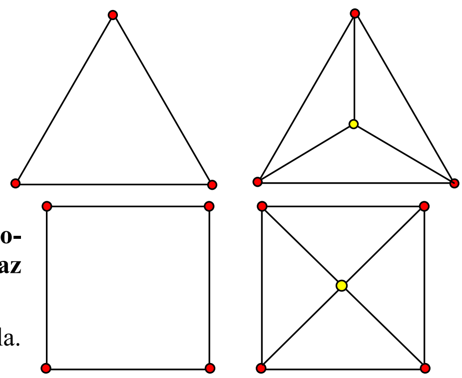
Ebben a feladatsorban az elektrosztatikus tér egyszerű egyensúlyait vizsgáljuk, majd kettő, ellentétes előjelű töltés együttes terére nézünk néhány szokatlan példát.

A nyugvó töltések elektromos kölcsönhatását a Coulomb-törvény írja le.
$F = k\dfrac{Q_1 \cdot Q_2}{R^2}$, ahol Q_1 és Q_2 a két ponttöltés nagysága, R a közöttük lévő távolság. Az erő iránya egybeesik a két ponttöltést összekötő egyenessel. Az azonos előjelű töltések taszítják, a különbözőek vonzzák egymást.
Az ábrán látható, egymástól d távolságra lévő két rögzített pozitív töltés közé egy rögzítetlen töltést helyezünk.

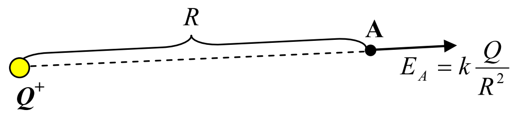
1. **Hova tegyük, hogy egyensúlyban legyen?**
2. **Mekkora és milyen előjelű legyen a 3. töltés, hogy az egyensúly fennálljon?**
3. **Hogyan válasszuk meg a 3. töltés előjelét és nagyságát, ha azt szeretnénk, hogy a két eredeti töltés rögzítésének eltávolítása után is megmaradjon az egyensúly?**



4. **Hogy módosul a feladat, ha egy egyenlő (*a*) oldalú háromszög csúcsaiban lévő, azonos nagyságú rögzítetlen Q^+ töltéseket szeretnénk egyensúlyban tartani egy 4. töltéssel?**
5. **Mi lesz a megoldás, ha egy *a* oldalú négyzet csúcsaiban vannak az azonos pozitív töltések, s egy 5. töltés biztosítja az egyensúlyt?**

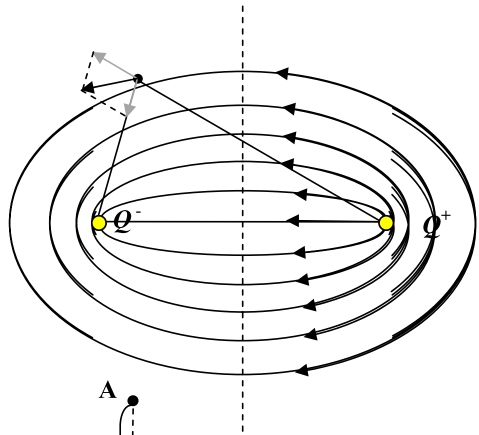


A töltések között ható erővektorok eredője nulla. A megoldásban segít az ábra.
Az elektromos térerősség definíció szerint az egységnyi töltésre ható erő. Nagysága annak a Q töltésnek nagyságától függ, amelyik a teret kelti, s attól a távolságtól, amelyre a vizsgált pont a teret keltő töltéstől elhelyezkedik.



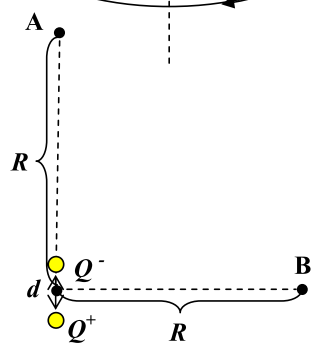
Két azonos nagyságú, de ellentétes előjelű elektrosztatikus töltés tere

A teret az erővonalak teszik szemléletessé. Az erővonalak iránya megegyezik a térerősség-vektor irányával az adott pontban.
Bizonyítsd be, hogy a két ponttöltés közötti felező merőleges mentén (szaggatott vonal) a térerősség-vektorok párhuzamosak!



Dipólus-tér

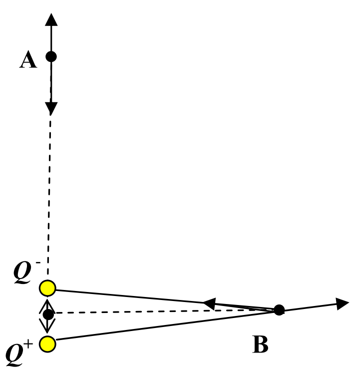
A dipólus Q^+ és tőle d távolságra lévő, vele megegyező nagyságú Q^- töltésből áll. A dipóltér erősségét a dipól tengelyének irányában (A) és arra merőlegesen (B) vizsgáljuk $R >> d$ távolságban.



Számoljuk ki a térerősséget az A pontban!

$$E_A = -k\frac{Q}{(R-\frac{d}{2})^2} + k\frac{Q}{(R+\frac{d}{2})^2} = k \cdot Q\,\frac{-(R+\frac{d}{2})^2 + (R-\frac{d}{2})^2}{(R^2-\frac{d^2}{4})^2} = kQ\,\frac{-2Rd}{(R^2-\frac{d^2}{4})^2}$$

ha $R>>d$ akkor $R^2 >> \frac{d^2}{4}$ *így* $\frac{d^2}{4}$ elhanyagolható R^2 mellett.

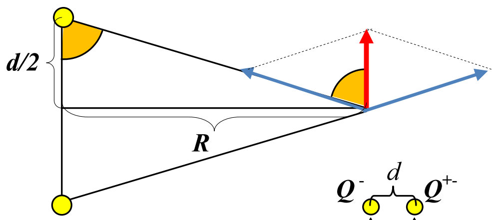


Így $E_A = -kQ\frac{2d}{R^3}$

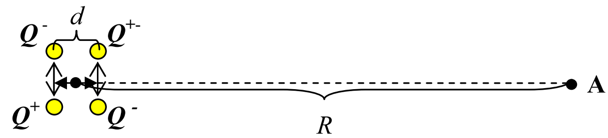
6. Határozd meg a B pontban a dipóltér erősségét!

- Határozd meg a két összeadandó térerősség-vektor nagyságát!
- Állapítsd meg a függőlegessel bezárt szögük koszinuszát az elrendezés geometriai adataiból!
- Használd ki az $R>>d$ feltételt!
  $M = Qd$ az úgynevezett dipólmomentum

Mivel a mágneses tér hasonló szerkezetű, mint az elektromos dipóltér, elmondható, hogy a sarkok környezetében kétszer olyan erős a Föld mágneses tere, mint az Egyenlítő mentén.



Két dipól szembefordításával kvadrupólt (négy pólus) állíthatunk elő.



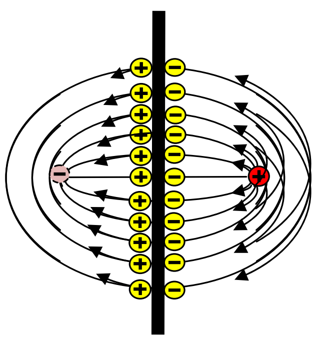
7. A dipóltérre kapott eredmények és az alkalmazott módszerek alapján igazold, hogy a kvadrupóltér erőssége az A pontban fordítva arányos R^4-nel, ahol $R>>d$!

Semleges vezetők sztatikus elektromos térben

Ha az elektromos térbe egy vezetőt helyezünk, töltései átrendeződnek, töltésmegosztás keletkezik.

8. Mutass rá egy példát!
9. A megosztott töltések a vezető felületén helyezkednek el. Miért?
10. Mivel a töltések elmozdulhatnak a vezető felületén, ezért a megosztás következtében létrejövő térerősség mindig merőleges a vezető felületére. Miért?

A bizonyítás során abból indulj ki, milyen következménye lenne, ha nem lennének az erővonalak merőlegesek a vezető felületére!



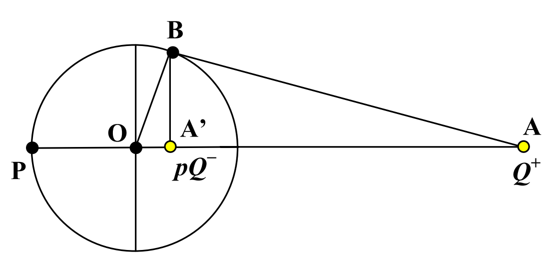
Egy ponttöltés  **és egy semleges fémlap kölcsönhatása**

Egy semleges fémlap felületén egy ponttöltés megosztást hoz létre. A kialakult tér olyan szerkezetű a lemez széleitől távol, mint az a dipóltér, melyet a ponttöltés és egy vele egyenlő nagyságú (de ellentétes előjelű) „tükörtöltés" hozna létre szabad térben, fémlap nélkül. A tükörtöltés helye az eredeti töltés fémlapra vonatkozó tükörpontja.

11. Mekkora erővel hat egymásra egy *Q* töltés és egy tőle *d* távolságra lévő kiterjedt fémlap?

Egy ponttöltés és egy semleges fémgömb kölcsönhatása

A kialakult erővonalkép ebben az esetben is két ellentétes előjelű töltés elektromos terével helyettesíthető. A Q^+ töltéshez található egy olyan pQ^- töltés, melynek tere a Q^+ töltéssel együtt pontosan olyan erővonalképet eredményez, mint a fémgömb a Q^+ töltéssel együtt. A Q^+



töltés tükörképének helye ebben az esetben az A’ pont lesz, amely az A-ból a körhöz húzott érintő érintési pontjából az AO szakaszra állított merőleges metszése az AO-val.

12. Határozd meg az A’ pont helyzetét!

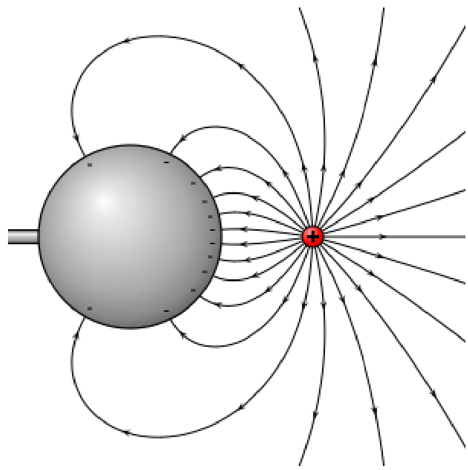
13. Add meg *p* értékét úgy, hogy a B pontban a térerősség merőleges legyen a gömb felszínére!

- OA = d; OB = R, mivel OA’B háromszög és az OBA háromszög hasonló; az oldalak arányából az OA’ meghatározható, s ebből A’B, majd A’P kiszámítható.
- Az AB távolság Pitagórasz tételéből számítható. A Q^+ töltés B pontban mért térerősségének nagysága egyenlő kell hogy legyen a pQ^- töltés B pontban mért térerősségének AB irányú (érintő irányú) komponensével.
  A szükséges szög koszinuszát az elrendezés geometriai adataiból kaphatjuk.

14. Mutasd meg, hogy a P pontban a térerősség ekkor nulla!

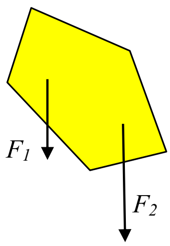
- A’P szakasz és AP szakasz hosszának ismeretében az állítás igazolható.

Természetesen a gömb minden pontjára igaz, hogy a térerősség merőleges a gömbfelületre, mivel a gömb vezető. (Ez egyszerűbben bizonyítható annak igazolásával, hogy a gömb ekvipotenciális. De a potenciál fogalma és annak használata meghaladja ennek a feladatlapnak a kereteit.)



A súlypont meghatározása

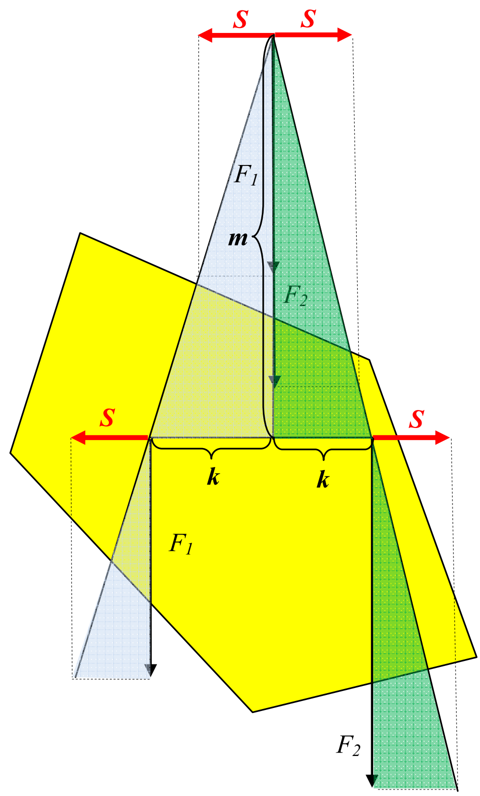
Az erők összeadásának fontos fejezete a párhuzamos hatásvonalú erők összeadása. Az ilyenkor alkalmazott, a fizika szempontjából helyes eljárások némileg eltérnek a matematika vektorösszeadási szabályaitól.



Párhuzamos hatásvonalú erők összeadása

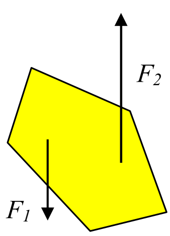
A 4. feladatlap az erők egyensúlyával foglalkozott. Egy erő támadáspontja eltolható a hatásvonala mentén. Alkalmazzuk ezt az elvet párhuzamos hatásvonalú erők összeadásánál!

Hogyan adható össze az elhanyagolható súlyú testre ható F_1 és F_2 erő?



1. **Az ábra segítségével igazold, hogy a párhuzamos hatásvonalú, egyirányú erők eredőjének nagysága a két erő összege, s az eredő hatásvonala két hatásvonal közé esik oly módon, hogy $F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$!**

2. **Hogyan adható össze két párhuzamos hatásvonalú, de egymással ellentétes erő? A megoldást add meg szerkesztéssel!**

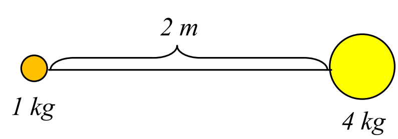


3. **Hogyan kapcsolódik a párhuzamos hatásvonalú erők összeadásának módszere a forgatónyomaték fogalmához? Ne csak formális kapcsolatot mutass be!**
4. **Hogyan adható össze két azonos nagyságú, de ellentétes irányú, párhuzamos (de nem egybeeső) hatásvonalú erő?**

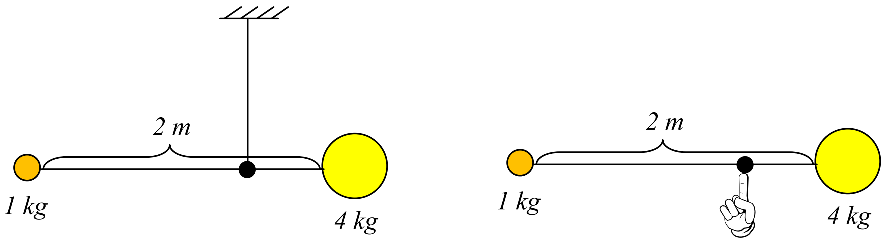
A súlyvonal meghatározása

Ha egy testet tömegpontok összességének fogunk fel, akkor a test egyes tömegpontjaira ható gravitációs erők párhuzamosak lesznek. Ezen párhuzamos erők eredőjének hatásvonala lesz a test egy súlyvonala.

A két golyót súlytalannak tekinthető pálca köti össze.



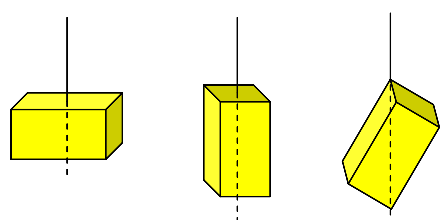
5. Hol van a „súlyzó” pálcára merőleges súlyvonala?

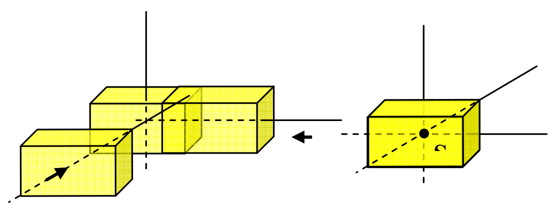


Amennyiben a pálcát a súlyvonala mentén függesztjük fel vagy támasztjuk alá, egyensúlyban lesz.

6. Hogyan érvényesül ilyenkor az egyensúly feltétele? Mekkora lesz a felfüggesztéskor a kötélben ébredő erő, illetve alátámasztáskor a nyomóerő?

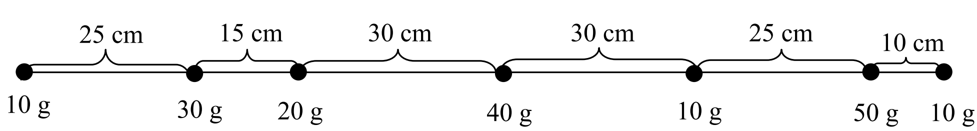
A súlypont kijelölése méréssel
Ha egy kiterjedt testet több pozícióban felfüggesztünk, mindegyik pozíció kijelöl egy súlyvonalat. A súlyvonalak egy pontban metszik egymást, ez a súlypont.





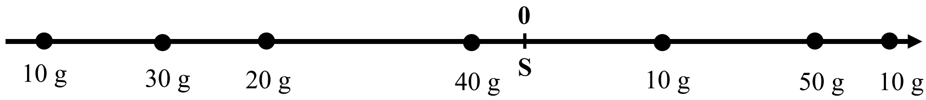
A súlypont kiszámítása egy egyenesbe eső tömegpontok esetében

Ahogy korábban láttuk, a párhuzamos hatásvonalú erők összeadásának szabályából a forgatónyomaték fogalma levezethető.
A forgatónyomatékok segítségével pedig a súlypont könnyen megtalálható egy pontrendszer esetében is. A pontrendszer súlypontja ugyanis az a pont lesz, melyre nézve az egyes tömegpontokra ható párhuzamos súlyerők nem forgatnak, azaz forgatónyomatékainak összege nulla lesz. A test, ezen pontját megtámasztva, egyensúlyba hozható, ami azt jelenti, hogy egyetlen erővel kiegyenlíthető a pontrendszer tömegpontjaira ható súlyerők eredője. Mindez csak úgy képzelhető el, ha az eredő hatásvonala egybeesik az alátámasztáskor (felfüggesztéskor) fellépő erő hatásvonalával. Nagysága nyilván egyenlő az alátámasztáskor (felfüggesztéskor) a testre ható erővel.
Hol van az alábbi egy egyenesbe eső tömegpontokat tartalmazó pontrendszer súlypontja?



7. Határozd meg a rendszer súlypontjának helyét az egyenes mentén!

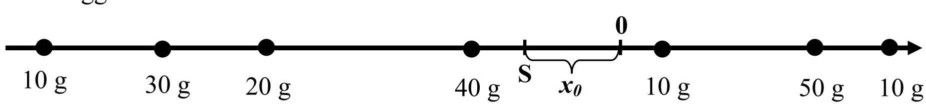
Keressünk egy általános megoldást a problémára!



A tömegpontrendszerre egy számegyenest helyeztünk. Amennyiben a számegyenes origója egybeesik a súlyponttal (ezt nem tudhatjuk előre), akkor igaz lesz a következő összefüggés: $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i = 0$.

A kifejezés rövidített felírása az ($m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+\ldots+m_nx_n$) összegnek, ahol az x lehet pozitív és negatív annak függvényében, milyen irányba esik a számegyenes origójától. Az egyenlet nulla volta miatt egyszerűsíthettünk g-vel.

Amennyiben a számegyenes origóját a súlyponttól x_0 távolságra helyezzük, az alábbi összefüggés írható fel:



$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_0) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_0 = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_0 \rightarrow x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Ellenőrizd a 7. feladatban kapott eredményt a képlet segítségével!

Az eljárás általánosítható bárhány dimenzióra. Alább a kétdimenziós pontrendszerekre mutatjuk be.

A vektorok között az alábbi összefüggés írható fel:

$\underline{r}_0 + \underline{r}_i = \underline{r}'_i$ azaz

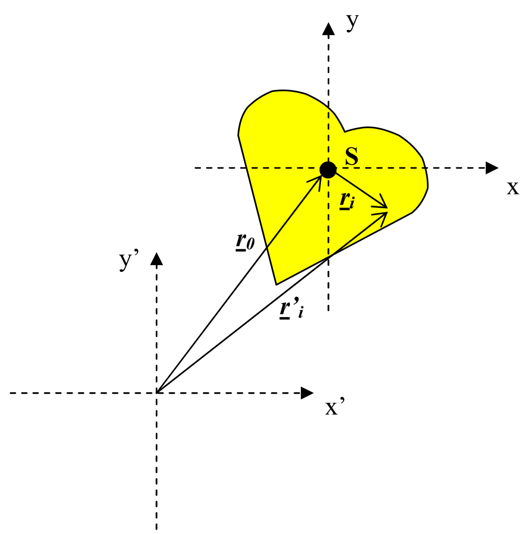
$\underline{r}_i = \underline{r}'_i - \underline{r}_0$

Elvégezve minden tömegpontra a összegzést:

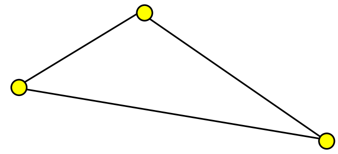
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \underline{r}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (\underline{r}'_i - \underline{r}_0) = 0$$

$$\underline{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \underline{r}'_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

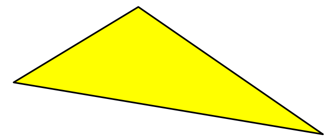
A vesszős rendszer az önkényesen felvett koordinátarendszer, a vektoregyenlet komponensenként megoldható.



Egyszerű feladatok megoldása

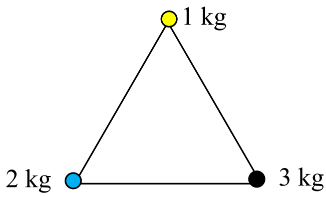


8. Mutasd meg, hogy egy tetszés szerinti alakú háromszög három csúcsába elhelyezett, azonos nagyságú tömegekből álló rendszer súlypontja a háromszög geometriai súlypontja!



9. Igazold azt is hogy egy tetszés szerinti alakú, állandó vastagságú, homogén anyagú háromszög lap súlypontja a háromszög geometriai súlypontja!

10. Határozd meg az alábbi 1 m oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban elhelyezkedő 3 tömegpontot tartalmazó rendszer súlypontját (tömegközéppontját)!

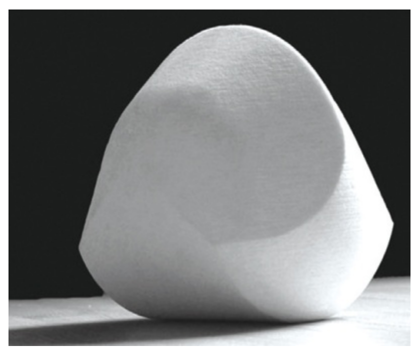


Alkalmazz legalább két különböző koordináta elhelyezést! Igazold az eredmények azonosságát!

A gömböc

A gömböc magyar találmány. Ismerkedj meg vele a világháló segítségével!

11. Hány pontban támasztható alá úgy ez a test, hogy egyensúlyban legyen? Miért különleges ez az eredmény?



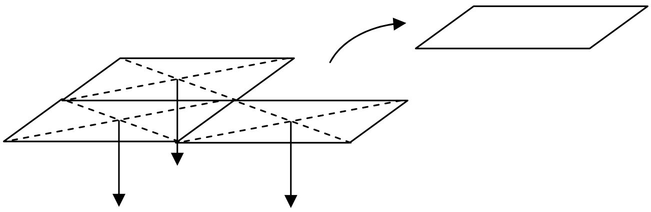
Trükkös súlyponti feladatok

Végezd el a fényképen látható kísérletet!

12. Állíts meg egy gyufa segítségével egy villát és egy kanalat az asztal sarkán! Mi a jelenség magyarázata?

13. Mutass néhány példát arra, amikor egy test (alakzat) súlypontja a testen kívülre esik!

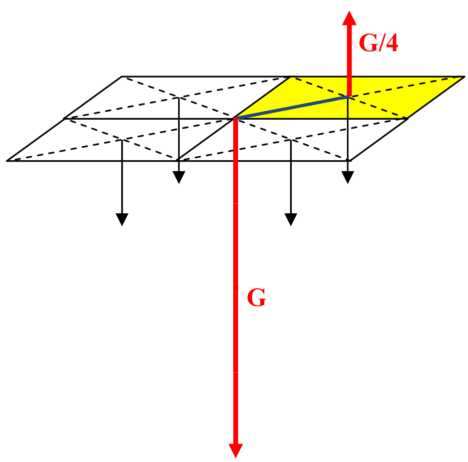
Egy *a* oldalú négyzetlapból kivágjuk a negyedrészét az ábrán látható módon. Hova kerül a súlypont?
A feladat számos módszerrel megoldható:



a) Adj össze két erőt, majd az eredőhöz add hozzá a harmadikat!

14. Hol van az eredő erő támadáspontja (a súlypont)?

b) Rajzolj meg két súlyvonalat, s keresd meg metszéspontjukat!



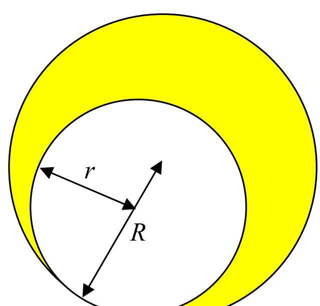
15. Mutasd meg, hogy az eredmény azonos az a) módszerrel kapottal!

c) Kivágni = mínusz egyszeresét hozzáadni!

Hova kerül a súlypont?

16. Vesd össze eredményedet a többi módszerrel megkapott eredményekkel!

„Holdak” súlypontja



17. Hol van az alábbi homogén síklapból kivágott alakzat súlypontja?

r = 2/3R

(Figyelj a tömegek arányára!)